531
M76c
v.2
REMOTE STORAGE

COURS
DE
MÉCANIQUE RATIONNELLE

Professé à la Faculté des Sciences de Paris en 1924-1925

PAR PAUL MONTEL
Professeur à l'Université de Paris

Recueilli et rédigé

PAR J. RENAUD ET A. ROBBA
Élèves à l'École Normale supérieure

LIVRE II

MÉCANIQUE ANALYTIQUE
MÉCANIQUE DES FLUIDES — POTENTIEL

ASSOCIATION DES ANCIENS ÉLÈVES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES

COURS

DE

MÉCANIQUE RATIONNELLE

Professé à la Faculté des Sciences de Paris en 1924-1925

PAR PAUL MONTEL
Professeur à l'Université de Paris

Recueilli et rédigé

PAR J. RENAUD ET A. ROBBA
Élèves à l'École Normale supérieure

LIVRE II

MÉCANIQUE ANALYTIQUE
MÉCANIQUE DES FLUIDES — POTENTIEL

PARIS
LIBRAIRIE DE L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE
LÉON EYROLLES, ÉDITEUR
3, Rue Thénard
1926
Tous droits réservés.

531
M 76c
REMOTE STORAGE

Tome II

Mécanique Analytique

La Mécanique analytique est la Mécanique des actions sans frottement ; elle repose sur le Principe des travaux virtuels.

633480

Chapitre I

Principe des travaux virtuels.

Nous démontrerons le principe des travaux virtuels dans le cas d'un système de solides en contact les uns avec les autres, ou en contact avec des obstacles fixes, les liaisons étant bilatérales et réalisées sans frottement.

Nous dirons qu'un point est soumis à une liaison bilatérale lorsqu'il est assujetti à rester entre deux feuillets très voisins d'une surface; la liaison s'exprime alors par une équation qui est celle de la surface

$$f(x, y, z) = 0$$

sur laquelle le point doit demeurer.

Si le point est simplement posé sur une surface et peut s'en détacher, la liaison est dite unilatérale; elle s'exprime alors par une inégalité: l'équation de la surface étant $f(x, y, z) = 0$, on devra avoir:

$$f(x, y, z) \leqq 0$$

si le point doit se trouver du côté de la surface où $f < 0$.

Considérons un système de points assujettis à des liaisons sans frottement. On appelle forces de liaison les forces qui proviennent des liaisons imposées au système: ce sont, par exemple, les forces qui agissent aux

articulations du système, ou les réactions qui se développent aux points de contact du système avec des surfaces ou des courbes.

On appelle déplacement virtuel tout déplacement du système compatible avec les liaisons. On vérifie dans tous les cas de la pratique, en supposant que les obstacles soient fixes, que la somme des travaux des forces de liaison est toujours nulle : on érige cette remarque en principe en disant :

La somme des travaux des forces de liaison est toujours nulle, quand les liaisons sont bilatérales et réalisées sans frottement.

Considérons alors un système de corps $C_1, C_2 \ldots C_p$, soient $\vec{R}_1, \vec{R}_2 \ldots \vec{R}_n$, les réactions qui agissent sur eux. Si le système est en équilibre, chaque corps est en équilibre ; par conséquent, pour chaque corps, la somme des travaux des forces extérieures et des forces de liaison est nulle, pour tout déplacement virtuel du corps. Donc, pour l'ensemble des corps, la somme des travaux des forces directement appliquées et des forces de liaison est nulle ; or, nous venons de voir que la somme des travaux des forces de liaison est nulle. Donc la somme des travaux des forces directement appliquées est nulle.

Nous avons ainsi éliminé les forces de liaison et trouvé une condition nécessaire de l'équilibre d'un système de corps. Montrons que cette condition est suffisante. Supposons en effet un système de solides tel que la somme des travaux des forces directement appliquées soit nulle pour tout déplacement virtuel et montrons que ce système est en équilibre, c'est-à-dire que, si on le suppose primitivement au repos, il reste au repos quand on lui applique le système de forces considéré. En effet, s'il n'en était pas ainsi, le système

de solides se mettrait en mouvement, et le déplacement réel qu'il prendrait serait un déplacement virtuel, pour lequel, comme nous l'avons vu, la somme des travaux des forces de liaison est nulle ; donc, comme par hypothèse la somme des travaux des forces directement appliquées est nulle, la somme des travaux de toutes les forces serait nulle.

Or, si l'on considère l'un des points matériels du système qui se mettent en mouvement, sa trajectoire est tangente au départ à la ligne d'action de la résultante $\overrightarrow{F_0}$ des forces qui agissent sur lui (fig. 143) ; $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0$ étant les composantes du déplacement initial et $X_0\ Y_0\ Z_0$ les composantes de $\overrightarrow{F}$, on a par hypothèse

$$\Sigma (X_0 \Delta x_0 + Y_0 \Delta y_0 + Z_0 \Delta z_0) = 0$$

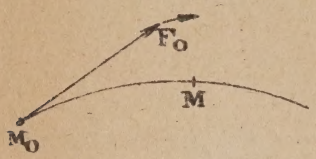

Fig. 143

Or,

$$\Delta x_0 = x'_0 \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t^2 (x''_0 + \varepsilon_1),$$

$$\Delta y_0 = y'_0 \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t^2 (y''_0 + \varepsilon_2),$$

$$\Delta z_0 = z'_0 \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t^2 (z''_0 + \varepsilon_3),$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ désignant des quantités infiniment petites avec Δt

Mais $\quad x'_0 = y'_0 = z'_0 = 0,$

le corps étant primitivement au repos.

D'où, pour l'expression $\Delta \mathcal{T}$ du travail élémentaire

$$\Delta \mathcal{T} = \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \Sigma \left[(X_0 x''_0 + Y_0 y''_0 + Z_0 z''_0) + \varepsilon_1 X_0 + \varepsilon_2 Y_0 + \varepsilon_3 Z_0 \right]$$

Or :

$$m x''_0 = X_0$$
$$m y''_0 = Y_0$$
$$m z''_0 = Z_0$$

d'où, J étant l'accélération :

$$\Delta \mathcal{T} = \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \left[\Sigma m \Gamma_0^2 + \Sigma (\varepsilon_1 x_0 + \varepsilon_2 y_0 + \varepsilon_3 z_0) \right]$$

Le premier terme de cette somme est positif ; le second est inférieur à $3\varepsilon A$, A étant une limite supérieure des nombres Γ_0 ; on peut donc le rendre aussi petit que l'on veut. On trouve donc que la somme des travaux des forces est positive, ce qui est contraire à l'hypothèse ; donc le corps reste en équilibre.

D'où le <u>principe des travaux virtuels</u> dans le cas des solides :

<u>Pour qu'un système de solides en contact sans frottement entre eux ou avec des obstacles fixes soit en équilibre, les liaisons étant bilatérales, il faut et il suffit que la somme des travaux des forces directement appliquées soit nulle pour tout déplacement compatible avec les liaisons.</u>

<u>Remarque I</u>. — Si les liaisons sont unilatérales, la condition précédente est seulement nécessaire, et, parmi les solutions obtenues en cherchant à satisfaire à cette condition on doit conserver seulement celles pour lesquelles les liaisons sont respectées.

Cherchons, par exemple, les positions d'équilibre d'un point pesant placé à l'intérieur d'une cavité (fig. 144).

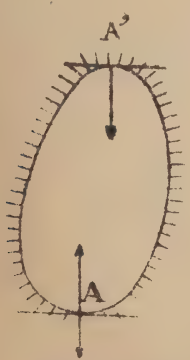

Fig 144

La seule force directement appliquée est la pesanteur et la somme des travaux élémentaires pour chaque point du système est $mg\,dz$.

L'application du principe des travaux virtuels nous montre que les positions d'équilibre doivent satisfaire à la relation :

$$mg\,dz = 0 \quad \text{ou} \quad dz = 0 .$$

Le point doit donc se trouver dans un des plans horizontaux

tangents en A ou A' à la surface. L'examen des liaisons nous montre que, seule, la position inférieure A convient.

Remarque II.— Nous avons supposé les liaisons sans frottement ; quand il y a frottement pour certaines liaisons, il suffit de considérer les forces de liaison correspondantes comme des forces directement appliquées, et d'appliquer le principe des travaux virtuels.

Mais quand il y a roulement, la somme des travaux des forces de frottement est toujours nulle.

Remarque III.— Le principe des travaux virtuels permet aussi de calculer les réactions.

Soient, par exemple, deux corps solides (S) et (S') en contact, $\vec{R}$ la réaction de (S') sur (S) ; on considère que $\vec{R}$ est, pour le corps (S), une force extérieure et on écrit que la somme des travaux des forces extérieures à (S) est nulle pour un déplacement de (S) ne respectant pas cette liaison : on obtient alors une équation déterminant $\vec{R}$.

Remarque IV.— On peut, dans la recherche des positions d'équilibre d'un solide, adjoindre au système des forces directement appliquées à ce solide un système quelconque équivalent à zéro : en effet, la somme des travaux de ces forces étant nulle, l'équilibre qui existait avant leur introduction subsiste après, par suite du principe des travaux virtuels. On retrouve ainsi les résultats obtenus dans la statique élémentaire du solide.

103— Cas particulier.— Supposons que les seules forces en jeu proviennent de la pesanteur ; le travail élémentaire, pour tout déplacement compatible avec les liaisons est $P\delta z$, z étant la cote du centre de gravité

système. On doit donc avoir, pour l'équilibre :

$$P\delta z = 0 \quad , \quad \text{c'est-à-dire} \quad \delta z = 0$$

Tout déplacement du centre de gravité autour de la position d'équilibre doit être un déplacement horizontal.

Donnons quelques exemples.

104 — **Balance**. — La position zéro est la position que prend la balance à vide (fig. 145).

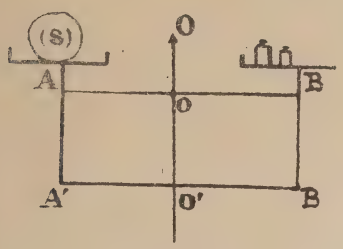

Fig. 145

Équilibrons le corps (S) de poids P au moyen de poids marqués Q. Écrivons que la somme des travaux des forces directement appliquées est nulle pour tout déplacement, ce qui donne, z et z' étant les cotes de A et B,

$$P\,dz + Q\,dz' = 0$$

Supposons que le point fixe O soit au milieu de AB; on aura

$$\frac{z+z'}{2} = \text{Cte} \quad \text{d'où} \quad dz + dz' = 0.$$

c'est-à-dire $(P-Q)\,dz = 0$ ou $P = Q$.

Si l'on avait, d'une façon plus générale :

$$dz' = -K\,dz$$

on en déduirait :

$$P - KQ = 0 \quad \text{ou} \quad P = KQ.$$

105 — **Presse à vis**. — On exerce sur la barre un couple N et la pression sur le plan est P (fig. 146).

Écrivons que pour un déplacement compatible avec les liaisons, autour de la position d'équilibre, la somme des travaux des forces appliquées est nulle; on aura pour une rotation $\delta\theta$ du bras amenant un déplacement vertical δz de la presse :

$$N\delta\theta - P\delta z = 0.$$

Mais chaque point du corps décrit une hélice de pas h ; d'où la relation :

$$\frac{\delta z}{\delta\theta} = \frac{h}{2\pi}$$

et

$$\left(N - P\frac{h}{2\pi}\right)\delta\theta = 0.$$

c'est-à-dire

$$P = N\,\frac{2\pi}{h}$$

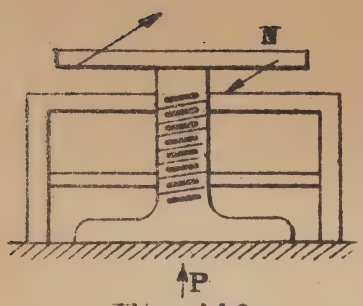

Fig. 146

106 — Suspension bifilaire. — On considère une aiguille AB suspendue par deux fils CA, DB à deux points fixes C et D situés dans un même plan horizontal (fig. 147).

Dans la position d'équilibre le système forme un rectangle ABCD. Exerçons sur l'aiguille AB un couple horizontal dont l'axe soit mesuré par N ; l'aiguille tourne et prend une position d'équilibre faisant un angle φ avec la position initiale ; son centre de gravité G vient en G', sur la verticale OG qui est un axe de symétrie pour le système, soit $GG' = z$. P désignant le poids de l'aiguille, le principe des travaux virtuels nous donne :

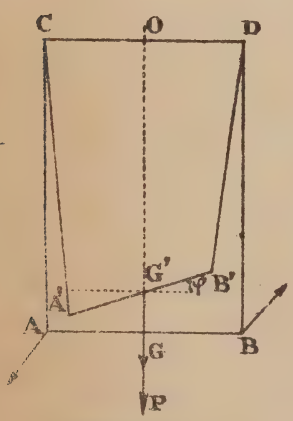

Fig. 147

$$N\delta\varphi - P\delta z = 0.$$

Si nous nous bornons aux déplacements dans lesquels G reste sur la même verticale, z et φ sont liés par une relation ; écrivons en effet que $CA' = CA = l$.

Prenons trois axes de coordonnées rectangulaires ; la verticale de G comme axe Gz, la position primitive de l'aiguille AB comme axe Gx, et un axe Gy perpendiculaire aux deux précédents (fig. 148). 2a étant la longueur de l'aiguille, les coordonnées de C sont :

$$a\ ,\ o\ ,\ l\ ;$$

celles de A' sont :

$$a\cos\varphi\ ,\ a\sin\varphi\ ,\ z\ .$$

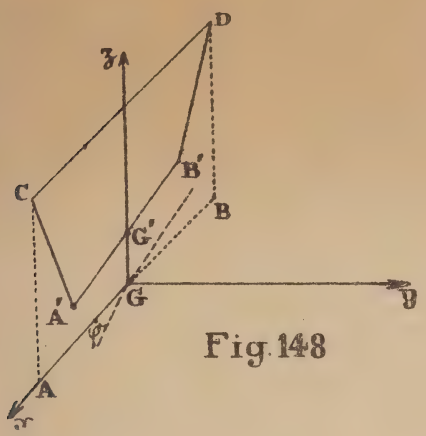

Fig. 148

D'où, pour l'expression de la distance CA' ;

$$\overline{CA'}^2 = a^2(1-\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi + (l-z)^2 = l^2$$

ou

$$2a^2(1-\cos\varphi) + (l-z)^2 = l^2.$$

Différentions, $2a^2\sin\varphi\,\delta\varphi - 2(l-z)\,\delta z = 0$

ou $$\delta\varphi = \frac{l-z}{a^2\sin\varphi}\,\delta z$$

d'où la relation :

$$N = P\,\frac{a^2\sin\varphi}{l-z}$$

107 — Conséquence du principe des travaux virtuels.

Lorsqu'on a des corps liés les uns aux autres par un mécanisme intermédiaire quelconque, les conditions d'équilibre sont les mêmes que si le mécanisme intermédiaire n'existait pas. C'est ainsi que, par exemple, lorsque l'on a un corps ayant un point fixe, on ne s'occupe pas de la manière matérielle dont est obtenue la fixité du point : tout se passe comme si la liaison était réduite à son élément géométrique, le point.

108 — Extension du principe des travaux virtuels. —

Système holonome. — Soit un système constitué par n points matériels $P_1 P_2 \dots P_n$; se donner la position du système, c'est se donner les $3n$ coordonnées des points $P_1 P_2 \dots P_n$, soient $x_1 y_1 z_1$; $x_2 y_2 z_2$; $\dots$; $x_n y_n z_n$.

Ce système est en général assujetti à des liaisons : le système de points considéré est par exemple un corps solide, ou doit rester sur une surface ou une courbe données, cette surface ou cette courbe pouvant d'ailleurs se déplacer et se déformer avec le temps. Ces liaisons se traduiront par un nombre K' de relations, telles que :

$$F_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0,$$
$$F_2(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$F_{K'}(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0.$$

Supposons qu'on puisse résoudre ces équations par rapport à K' des variables en fonction des $3n - K' = K$ autres variables que nous désignerons par $q_1, q_2, \dots, q_K$. On aura alors $3n$ expressions de la forme :

$$x_\nu = f_\nu(q_1, q_2, \dots, q_K, t)$$
$$y_\nu = g_\nu(q_1, q_2, \dots, q_K, t) \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$
$$z_\nu = h_\nu(q_1, q_2, \dots, q_K, t)$$

Un système est appelé holonome lorsque les coordonnées $x_\nu\ y_\nu\ z_\nu$ de ses différents points peuvent s'exprimer en fonction de K paramètres $q_1, q_2, \dots, q_K$ et du temps. Les variables $q_1, q_2, \dots, q_K$ s'appellent coordonnées de Lagrange.

On dit que le système possède K degrés de liberté. En particulier, si $K = 1$, la position du système ne dépend que d'un seul paramètre : on dit que l'on a un système à liaisons complètes.

Remarque. — Si l'on introduit de nouvelles liaisons,

par exemple si l'on rend invariable la distance de deux points du système, cela revient à introduire ne nouvelles relations entre les paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_K$. Supposons que leur nombre soit r :

$$\varphi_1(q_1, q_2, \ldots, q_K, t) = 0,$$
$$\varphi_2(q_1, q_2, \ldots, q_K, t) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_r(q_1, q_2, \ldots, q_K, t) = 0;$$

dans ces conditions, le système n'a plus que $K-r$ degrés de liberté. On peut toutefois conserver les K paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_K$, sachant que ces paramètres vérifient r relations. On dit alors que l'on a un <u>système holonome à K paramètres surabondants</u>. Ce cas se présente souvent en Mécanique. Par exemple, si l'on prend comme paramètres les $3n$ coordonnées des n points du système liées par les équations $F_i = 0$.

109 — <u>Système non holonome</u>. — Reprenons le système précédent des équations $\varphi_i = 0$; de ces relations, nous pouvons déduire

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_2} dq_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_K} dq_K + \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} dt = 0$$

Des relations de position, exprimées par les équations $\varphi_i = 0$, nous avons ainsi déduit des relations de mobilité, relatives aux vitesses $\frac{dq}{dt}$.

Réciproquement, supposons qu'on se donne des conditions de mobilité telles que :

$$a_1 dq_1 + a_2 dq_2 + \ldots + a_K dq_K + b\, dt = 0,$$

ou, ce qui revient au même, des relations entre les vitesses telles que

$$a_1 \frac{dq_1}{dt} + a_2 \frac{dq_2}{dt} + \ldots a_K \frac{dq_K}{dt} + b = 0.$$

Cette relation ne sera pas en général une différentielle totale et on ne pourra pas la remplacer par une relation

finie telle que :

$$\varphi(q_1, q_2, \ldots, q_k, t) = 0 .$$

En d'autres termes, on ne pourra pas remplacer les conditions de mobilité par des conditions de position ; on dit alors que le système est non holonome.

110 — Exemple de système non holonome : bille de billard. — Soit une sphère de rayon R, roulant sur un plan pris comme plan des x, y (fig. 149) ; désignons par α, β, R les coordonnées α, β du centre C de la bille par rapport aux axes $Ox_1 y_1 z_1$, et par φ, ψ, θ les angles d'Euler fixant la position de la bille par rapport à des axes $Cxyz$ d'origine C et parallèles aux axes fixes $Ox_1 y_1 z_1$.

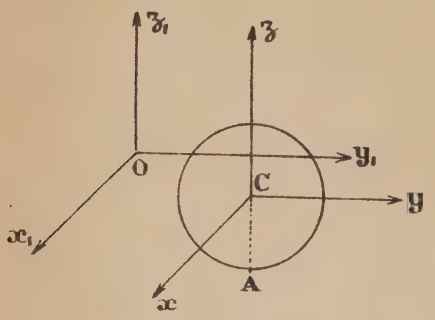

Fig. 149

Nous traduirons analytiquement la liaison, qui est le roulement de la sphère sur le plan, en écrivant que la vitesse du point de contact A de la sphère avec le plan est nulle.

Soient p, q, r les composantes de la rotation de la sphère par rapport aux axes $Cxyz$; les composantes de la vitesse d'un point de la bille, de coordonnées $x y z$, par rapport à ces axes $Cxyz$, sont :

$$\frac{d\alpha}{dt} + qz - ry ,$$

$$\frac{d\beta}{dt} + rx - pz ,$$

$$py - qx .$$

En particulier, pour le point A, $x=0$, $y=0$, $z=-R$, et, en écrivant que la vitesse de ce point est nulle, on obtient les relations :

$$\frac{d\alpha}{dt} - qR = 0 .$$

$$\frac{d\beta}{dt} + pR = 0 .$$

Prenons alors des axes $C x_0 y_0 z_0$ attachés à la bille faisant avec les axes $Cxyz$ les angles $\theta\ \varphi\ \psi$ (fig.150).

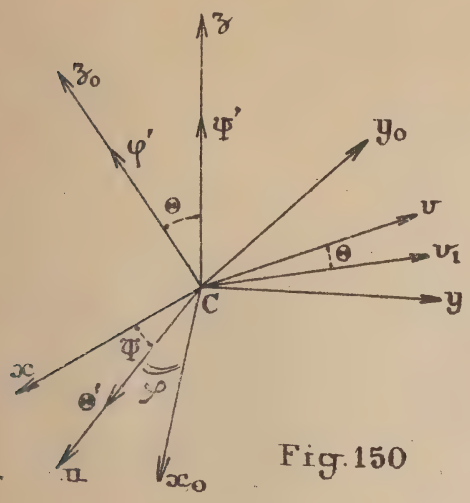

Fig.150

Les rotations sont φ', ψ', θ', respectivement portées par les axes Cz_0, Cz, Cu ; évaluons p, q, r en fonction de ces quantités et des angles φ, ψ, θ.

Soit Cv_1 la projection sur le plan des xy de l'axe Cv ; les composantes de φ' sont :
sur l'axe Cz : $\varphi' \cos\theta$
sur l'axe Cv_1 : $-\varphi' \sin\theta$.

d'où :

$$p = \theta' \cos\psi + \varphi' \sin\theta \sin\psi .$$
$$q = \theta' \sin\psi - \varphi' \sin\theta \cos\psi$$
$$r = \varphi' \cos\theta + \psi' .$$

ce qui s'écrit, en tenant compte des relations précédentes,

$$\frac{1}{R}\ d\alpha - \sin\psi\, d\theta + \sin\theta \cos\psi\, d\varphi = 0$$
$$\frac{1}{R}\ d\beta + \cos\psi\, d\theta + \sin\theta \sin\psi\, d\varphi = 0$$

Nous obtenons ainsi des relations linéaires par rapport aux différentielles des paramètres qui sont ici

$$q_1 = \alpha\ ,\ q_2 = \beta\ ,\ q_3 = \theta\ ,\ q_4 = \varphi\ ,\ q_5 = \psi\ ;$$

de plus, les conditions obtenues sont homogènes par rapport aux vitesses, car le coefficient b de dt dans les équations générales est ici nul.

Montrons que le système n'est pas holonome, c'est-à-dire qu'il est impossible de remplacer une des relations précédentes par une relation de position entre les coordonnées $\alpha, \beta, \theta, \varphi, \psi$, dont dépend le système. En effet, si une telle relation existait, on pourrait la résoudre par rapport à β, on aurait, par exemple :

$$\beta = F(\alpha, \varphi, \theta, \psi);$$

or, la valeur de β ne doit pas changer si l'on change α en $\alpha + h$, car on peut changer la position de Oy_1 ; on doit donc avoir :

$$F(\alpha, \varphi, \theta, \psi) = F(\alpha + h, \varphi, \theta \psi),$$

et cette égalité montre que la fonction F ne dépend pas de α. On démontre de la même façon que F ne peut contenir θ, φ, ψ. La relation est donc impossible. Le roulement ne peut donc pas être représenté par une relation finie ; il est représenté par des relations différentielles non intégrables. La bille forme un système non holonome.

Supposons que le plan des xy soit animé d'un mouvement de translation, rectiligne et uniforme, par exemple, et soient $b, b', 0$ les composantes de la vitesse de translation de ce plan. Pour écrire que la bille roule sur le plan, il faudra encore écrire que la vitesse du point de contact A par rapport au plan est nulle, c'est-à-dire que la vitesse absolue de A est égale à sa vitesse d'entraînement, ce qui donne :

$$\frac{d\alpha}{dt} - qR = b$$

$$\frac{d\beta}{dt} + pR = b'$$

ou

$$\frac{1}{R}\, d\alpha - b\,dt + \ldots = 0.$$

$$\frac{1}{R}\, d\beta - b'\,dt + \ldots = 0.$$

Dans ce cas les relations de mobilité du système non holonome ne sont plus homogènes.

11 — **Liaisons unilatérales**. — Les liaisons unilatérales s'expriment par des inégalités :

$$\varphi_1(q_1, q_2, \dots, q_k, t) \leqslant 0,$$
$$\varphi_2(q_1, q_2, \dots, q_k, t) \leqslant 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\varphi_r(q_1, q_2, \dots, q_k, t) \leqslant 0.$$

Par exemple, la relation $\varphi(x, y, z) \leqslant 0$ exprime que le point x, y, z doit se trouver sur la surface dont l'équation est $\varphi(x, y, z) = 0$, ou d'un même côté de cette surface : celui pour lequel φ est négatif (fig. 151).

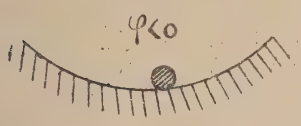

Fig. 151

De la même façon, si un point x, y, z est lié à un point x_0, y_0, z_0 par un fil flexible et inextensible de longueur l, la liaison s'exprime par l'inégalité :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - l^2 \leqslant 0.$$

Dans le cas de systèmes non holonomes, les liaisons unilatérales s'expriment aussi par des inégalités, entre différentielles ou entre vitesses, telles que :

$$a_1 dq_1 + a_2 dq_2 + \dots + a_k dq_k + b\,dt \leqslant 0.$$

Par exemple, dans le cas d'une bille qui se déplace sur un plan, si l'on suppose la vitesse de glissement non plus nulle, mais de direction constante xO, les liaisons se traduiront par le système

$$\frac{d\alpha}{dt} - qR \leqslant 0, \qquad \frac{d\beta}{dt} + pR = 0$$

12 — **Déplacements virtuels**. — On appelle déplacement

virtuel d'un système à l'instant t tout déplacement compatible avec les liaisons à l'instant t considéré. On suppose que pendant ce déplacement le temps t reste constant. Lorsque les liaisons dépendent du temps, le déplacement réel n'est pas, en général, un déplacement virtuel.

Considérons, par exemple (fig. 152), un anneau M assujetti à se déplacer sur un cercle qui est animé d'un mouvement de translation. Un déplacement virtuel MM' à l'instant t est tangent au cercle, le déplacement réel MM' est tangent en M à la trajectoire (C) de M ; ils ne sont donc pas confondus.

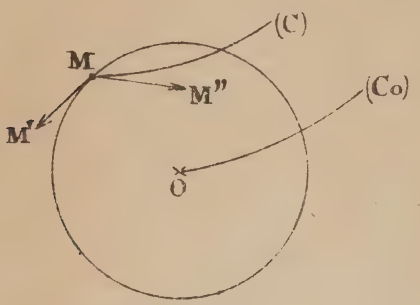

Fig. 152

Le déplacement réel fait toujours partie des déplacements virtuels lorsque les liaisons sont indépendantes du temps. Par exemple, dans l'exemple précédent, il en est ainsi quand le cercle est immobile.

Supposons que les liaisons soient bilatérales. Si le système est holonome, ces liaisons seront exprimées par des équations de la forme :

$$\varphi(q_1, q_2, \ldots, q_k, t) = 0 ;$$

si $\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_k$ représentent un déplacement compatible avec les liaisons à l'instant t, on aura :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_k}\delta q_k = 0.$$

Il est souvent commode d'imaginer que ces déplacements virtuels s'effectuent pendant un temps fictif u, c'est-à-dire que $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$ sont fonctions de u. Remarquons que, si $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$ représentent un

déplacement virtuel, les nombres $-\delta q_1, -\delta q_2, \ldots, -\delta q_k$ définissent aussi un déplacement virtuel. Nous dirons que les déplacements virtuels sont <u>réversibles</u>.

Si le système n'est pas holonome, les liaisons comprendront des conditions de mobilité telles que

$$a_1\,dq_1 + a_2\,dq_2 + \ldots + a_k\,dq_k + b\,dt = 0\,;$$

mais, pour un déplacement virtuel, $dt = 0$, et on obtient la condition

$$a_1\,\delta q_1 + a_2\,\delta q_2 + \ldots + a_k\,\delta q_k = 0\,,$$

ce qui montre que, comme précédemment, les déplacements virtuels sont réversibles.

Supposons maintenant que les liaisons soient unilatérales.

Si le système est holonome, ces liaisons sont exprimées par des inégalités telles que:

$$\varphi(q_1, q_2, \ldots, q_k, t) \leq 0\,.$$

Soit une position du système définie par les nombres $q_1, \ldots q_n$; si $\varphi < 0$, nous dirons que la configuration est ordinaire ; si $\varphi = 0$, nous dirons que l'on a une configuration frontière.

Désignons par $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$, un déplacement virtuel ; on devra avoir :

$$\varphi(q_1 + \delta q_1,\ q_2 + \delta q_2, \ldots,\ q_k + \delta q_k,\ t) \leq 0\,.$$

ce qui s'écrit :

$$\varphi(q_1, q_2, \ldots, q_k t) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\,\delta q_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\,\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\,\delta q_k\right)t \ldots \leq 0\,.$$

Deux cas sont alors à distinguer :

Si la configuration n'est pas frontière, on a $\varphi < 0$, et on peut prendre $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$ assez petits pour que le premier membre de l'inégalité précédente ait le signe de φ, c'est-à-dire soit négatif : par conséquent, aucune condition n'est imposée aux déplacements virtuels car on peut toujours supposer les variations δq assez petites pour que l'inégalité soit vérifiée.

C'est, par exemple, le cas d'un point assujetti à demeurer d'un côté d'une surface.

Si la configuration est frontière, on a

$$\varphi(q_1, q_2, \ldots, q_k, t) = 0.$$

on peut alors prendre les δq assez petits pour que le premier membre de l'inégalité ait le signe du premier terme; il faudra alors que l'on ait

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_k}\delta q_k \leq 0,$$

ce qui est une condition pour le déplacement virtuel $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$. Cette condition de mobilité montre que ce déplacement virtuel n'est pas réversible : par exemple, le point ne peut pas se trouver du côté de la surface où celle-ci est réalisée matériellement.

Si le système n'est pas holonome, il y a des conditions de mobilité telles que :

$$a_1 dq_1 + a_2 dq_2 + \ldots + a_k dq_k + b\,dt \leq 0;$$

d'où, pour un déplacement virtuel $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$, la condition

$$a_1 \delta q_1 + a_2 \delta q_2 + \ldots + a_k \delta q_k \leq 0,$$

qui montre que ce déplacement virtuel n'est pas réversible en général.

<u>En résumé</u> :

Si les liaisons sont bilatérales, que le système soit holonome ou non, les déplacements virtuels sont toujours réversibles.

Si les liaisons sont unilatérales et le système holonome aucune condition n'est imposée en déplacement virtuel pour une configuration ordinaire ; des conditions sont imposées si la configuration est frontière ; au contraire si le système est non-holonome, il y a toujours des conditions pour le déplacement virtuel. Dans les deux derniers cas, les déplacements virtuels ne sont pas réversibles.

113 — Extension du Principe des travaux virtuels. —

Supposons toujours qu'il n'y ait pas de frottement. Evaluons le travail des forces de liaison pour le cas des liaisons unilatérales.

Prenons le cas d'un point assujetti à rester d'un côté d'une surface (S). Pour une configuration ordinaire, il n'y a pas de force de liaison, le travail de liaison est nul. Pour une configuration frontière M sur (S), supposons que le point quitte la surface dans une direction MM' (fig. 153) ; la force de liaison est ici la réaction $\overrightarrow{MN}$ de la surface ; elle fait un angle aigu avec le déplacement MM' : donc le travail de cette force de liaison est positif. Il serait nul si le point restait sur la surface.

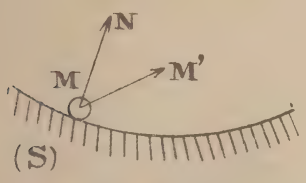

Fig. 153

De même considérons un fil OM de longueur l, le point O restant fixe ; pour une configuration ordinaire, la tension est nulle ; pour une configuration frontière, le fil est tendu, si le fil reste tendu, le point se déplace sur une sphère de centre O et de rayon l (fig. 154) ; la force de liaison est la tension $\overrightarrow{T}$, normale au déplacement de M ; son travail est nul. Si le fil se détend, M se rapproche de O dans la direction MM' et le travail de la tension est positif. Dans tous les cas, il est positif ou nul.

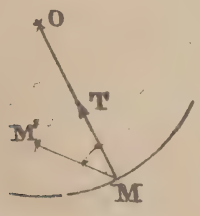

Fig. 154

On vérifie que dans chaque cas particulier il en est toujours de même : on est ainsi conduit à énoncer

le principe suivant :

Dans le cas des liaisons unilatérales sans frottement, la somme des travaux des forces de liaison est positive ou nulle pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons.

Supposons les liaisons indépendantes du temps : le déplacement réel est alors un déplacement virtuel ; nous admettrons la continuité des accélérations en chaque point.

Montrons alors que, dans le déplacement réel, le travail des forces de liaisons unilatérales ou bilatérales est toujours nul.

Nous avons vu déjà que, dans le cas de liaisons bilatérales, la somme des travaux des forces de liaison est toujours nulle, que le déplacement soit virtuel ou non.

Examinons le cas des liaisons unilatérales. On a, en chaque point, la relation

$$m\vec{J} = \vec{F} + \vec{N},$$

m désignant la masse du point, $\vec{F}$ la résultante des forces directement appliquées et $\vec{N}$ la force de liaison.

Si le point part d'une configuration ordinaire, la force de liaison $\vec{N}$ est nulle, son travail est nul.

Si le point part d'une configuration frontière à l'instant t, on a $N = 0$ à l'instant $t + dt$. Je dis que $\vec{N} = 0$ à l'instant t. En effet, $m\vec{J} - \vec{F}$ est une fonction continue du temps ; il en est donc de même pour $\vec{N}$ et, comme $\vec{N}$ est nulle quel que soit dt, elle est aussi nulle à l'instant t. Donc le travail de $\vec{N}$ est nul.

114 — Principe général des travaux virtuels. —

Pour qu'un système holonome ou non-holonome soumis à des liaisons sans frottement, unilatérales ou bilatérales, soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme des travaux des forces directement appliquées soit négative ou nulle pour tout déplacement virtuel.

1°) la condition est nécessaire. Supposons le système

en équilibre et imprimons lui un déplacement virtuel quelconque. Chaque point du système étant en équilibre, la résultante des forces qui agissent sur lui est nulle, et, pour le déplacement virtuel considéré, la somme des travaux de toutes les forces appliquées au point est nulle, or, ces forces sont $\vec{F}_\ell + \vec{F}$, $\vec{F}_\ell$ désignant la résultante des forces de liaison et $\vec{F}$ la résultante des forces directement appliquées ; donc, $\delta\mathcal{T}_\ell$ et $\delta\mathcal{T}$ désignant les travaux correspondants, on a la relation :

$$\delta\mathcal{T}_\ell + \delta\mathcal{T} = 0$$

c'est-à-dire, pour tout le système,

$$\Sigma(\delta\mathcal{T}_\ell + \delta\mathcal{T}) = 0.$$

Or, nous venons de voir que la somme des travaux des forces de liaison $\Sigma\delta\mathcal{T}_\ell$ était positive ou nulle. On a donc bien :

$$\Sigma\delta\mathcal{T} \leqslant 0.$$

2°) <u>la condition est suffisante</u>. La démonstration est semblable à celle du Principe restreint.

En effet, s'il n'y avait pas équilibre, le système se mettrait en mouvement et la somme des travaux de toutes les forces serait positive. Mais, dans ce déplacement réel, la somme des travaux des forces de liaison est nulle, donc la somme des travaux des forces directement appliquées est positive. Or le déplacement réel est aussi un déplacement virtuel, donc la somme des travaux des forces directement appliquées devrait être négative ou nulle ; on aboutit donc à une contradiction : le système est en équilibre.

<u>Remarque</u>. — Le principe restreint des travaux virtuels, relatif aux liaisons bilatérales, se déduit aussitôt du principe général énoncé plus haut.

On a, en effet, pour tout déplacement virtuel :

$$\Sigma\delta\mathcal{T} \leqslant 0 ;$$

mais les déplacements virtuels sont réversibles puisqu

les liaisons sont bilatérales ; donc, pour les déplacements opposés aux précédents, on a aussi

$$-\Sigma \delta \mathcal{C} \leqslant 0$$

Ces deux conditions entraînent :

$$\Sigma \delta \mathcal{C} = 0,$$

pour tout déplacement virtuel.

Chapitre II

Équations de Lagrange.

115 — Formation des équations de Lagrange. — Nous supposerons les liaisons bilatérales et réalisées sans frottement.

Considérons un système en mouvement ; à l'instant t, en chaque point, il y a équilibre entre les forces directement appliquées, les forces de liaison et les forces d'inertie $-m\vec{J}$ (Principe de d'Alembert) ; si, à cet instant t, on introduisait une force $-m\vec{J}$, et si l'on supprimait la vitesse du point, le point resterait en équilibre. Pour exprimer cet équilibre, nous appliquerons le principe des travaux virtuels, et nous écrirons que, pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons existant à l'instant t, la somme des travaux des forces directement appliquées au point et des forces d'inertie $-m\vec{J}$ est nulle ; réciproquement, si la somme de ces travaux est nulle, au point considéré, il y a équilibre à l'instant t entre les forces directement appliquées, les forces de liaison et les forces d'inertie, et les équations du mouvement sont satisfaites en chaque point.

En appliquant le Principe des travaux virtuels, nous devons supposer que le temps reste constant.

Supposons que le système soit constitué par n points et soient x, y, z les coordonnées de l'un d'eux M, x, y, z

les composantes de la résultante des forces qui lui sont directement appliquées ; la force d'inertie a pour composantes

$$-mx'', \qquad -my'', \qquad -mz''.$$

$\delta x, \delta y, \delta z$ désignant un déplacement virtuel compatible avec les liaisons à l'instant t, l'expression du Principe des travaux virtuels pour tout le système est

$$(1) \qquad \Sigma \left[(X - mx'')\,\delta x + (Y - my'')\,\delta y + (Z - mz'')\,\delta z \right] = 0$$

Nous allons déduire de cette condition les <u>équations de Lagrange</u>.

Considérons un système holonome dépendant de K paramètres ; chaque point M du système a des coordonnées de la forme :

$$x = f(q_1, q_2, \ldots q_K, t)$$
$$y = g(q_1, q_2, \ldots q_K, t)$$
$$z = h(q_1, q_2, \ldots q_K, t)$$

d'où le déplacement virtuel, où t reste constant :

$$\delta x = \frac{\partial f}{\partial q_1}\,\delta q_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2}\,\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial q_K}\,\delta q_K ,$$

$$\delta y = \frac{\partial g}{\partial q_1}\,\delta q_1 + \frac{\partial g}{\partial q_2}\,\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial g}{\partial q_K}\,\delta q_K ,$$

$$\delta z = \frac{\partial h}{\partial q_1}\,\delta q_1 + \frac{\partial h}{\partial q_2}\,\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial h}{\partial q_K}\,\delta q_K$$

$\delta x, \delta y, \delta z$ sont linéaires en $\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_K$; en portant ces valeurs dans l'expression (1), on aura une forme linéaire en $\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_K$; le coefficient de δq_1 par exemple sera :

$$\Sigma \left[(X - mx'')\frac{\partial f}{\partial q_1} + (Y - my'')\frac{\partial g}{\partial q_1} + (Z - mz'')\frac{\partial h}{\partial q_1} \right]$$

ou

$$\Sigma \left[(X - mx'')\frac{\partial x}{\partial q_1} + (Y - my'')\frac{\partial y}{\partial q_1} + (Z - mz'')\frac{\partial z}{\partial q_1} \right]$$

ce qui peut s'écrire, en changeant le signe du premier membre de l'équation (1) :

$$\Sigma m\left(x''\frac{\partial x}{\partial q_1}+y''\frac{\partial y}{\partial q_1}+z''\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)-\Sigma\left(X\frac{\partial x}{\partial q_1}+Y\frac{\partial y}{\partial q_1}+Z\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)=0.$$

Posons :

$$P_\alpha \equiv \Sigma m\left(x''\frac{\partial x}{\partial q_\alpha}+y''\frac{\partial y}{\partial q_\alpha}+z''\frac{\partial z}{\partial q_\alpha}\right),$$

$$Q_\alpha \equiv \Sigma\left(X\frac{\partial x}{\partial q_\alpha}+Y\frac{\partial y}{\partial q_\alpha}+Z\frac{\partial z}{\partial q_\alpha}\right).$$

La condition (1) s'écrit alors :

$$(2)\quad (P_1-Q_1)\delta q_1+(P_2-Q_2)\delta q_2+\ldots\ldots+(P_K-Q_K)\delta q_K=0$$

Le système possède K degrés de liberté ; les déplacements $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_K$, sont donc arbitraires et les coefficients du polynôme (2) en $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_K$, sont nuls ; d'où les équations

$$(3)\quad \begin{cases} P_1 = Q_1 \\ P_2 = Q_2 \\ \cdots\cdots \\ P_K = Q_K \end{cases}$$

Ces équations (3) sont équivalentes au principe de D'Alembert, c'est-à-dire aux équations du mouvement du système ; ce sont K équations différentielles qui nous permettront de déterminer les K paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_K$ en fonction du temps, c'est-à-dire les coordonnées des points du système en fonction du temps.

Introduisons la force vive du système :

$$2T=\Sigma m(x'^2+y'^2+z'^2)$$

($x, q_1', q_2', \ldots, q_3'$ étant les dérivées des paramètres $q_1, q_2 \ldots, q_K$, par rapport au temps, on a :

$$\begin{cases} x'=\dfrac{\partial x}{\partial q_1}q_1'+\dfrac{\partial x}{\partial q_2}q_2'+\ldots.+\dfrac{\partial x}{\partial q_K}q_K'+\dfrac{\partial x}{\partial t} \\ y'=\dfrac{\partial y}{\partial q_1}q_1'+\dfrac{\partial y}{\partial q_2}q_2'+\ldots.+\dfrac{\partial y}{\partial q_K}q_K'+\dfrac{\partial y}{\partial t} \\ z'=\dfrac{\partial z}{\partial q_1}q_1'+\dfrac{\partial z}{\partial q_2}q_2'+\ldots.+\dfrac{\partial z}{\partial q_K}q_K'+\dfrac{\partial z}{\partial t} \end{cases} ;$$

la fonction T est donc de la forme :

$$T = T_2 + T_1 + T_0 ,$$

T_2 étant une forme quadratique, T_1 une forme linéaire par rapport aux variables $q'_1, q'_2, \ldots, q'_\kappa$ et T'_0 ne dépendant pas de ces variables. Si les liaisons sont indépendantes du temps, les polynômes T'_0 et T'_1 disparaissent et la force vive est une forme quadratique en $q'_1, q'_2, \ldots, q'_\kappa$.

Evaluons P_α au moyen des dérivées de la fonction T.

Dans x', qui est linéaire par rapport aux q'_α, le coefficient de q'_α est $\frac{\partial x}{\partial q_\alpha}$; donc :

$$\frac{\partial x}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial x'}{\partial q'_\alpha}$$

de même

$$\frac{\partial y}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial y'}{\partial q'_\alpha} , \quad \frac{\partial z}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial z'}{\partial q'_\alpha}$$

Donc :

$$P_\alpha = \Sigma m\left(x''\frac{\partial x}{\partial q_\alpha} + y''\frac{\partial y}{\partial q_\alpha} + z''\frac{\partial z}{\partial q_\alpha}\right) = \Sigma m\left(x''\frac{\partial x'}{\partial q'_\alpha} + y''\frac{\partial y'}{\partial q'_\alpha} + z''\frac{\partial z'}{\partial q'_\alpha}\right)$$

c'est-à-dire :

$$P_\alpha = \frac{d}{dt}\Sigma m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q'_\alpha} + y'\frac{\partial y'}{\partial q'_\alpha} + z'\frac{\partial z'}{\partial q'_\alpha}\right) -$$

$$- \Sigma m\left[x'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x'}{\partial q'_\alpha}\right) + y'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y'}{\partial q'_\alpha}\right) + z'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z'}{\partial q'_\alpha}\right)\right]$$

On peut écrire

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x'}{\partial q'_\alpha}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_\alpha}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_\alpha} q'_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_2 \partial q_\alpha} q'_2 + \ldots + \frac{\partial^2 x}{\partial q_\kappa \partial q_\alpha} q'_\kappa + \frac{\partial^2 x}{\partial q_\alpha \partial t} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} q'_2 + \ldots + \frac{\partial x}{\partial q_\kappa} q'_\kappa + \frac{\partial x}{\partial t}\right) =$$

$$= \frac{\partial x'}{\partial q_\alpha} ;$$

d'où :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{dx}{dt}\right),$$

on peut ainsi permuter les dérivations totale et partielle.

P_α se met alors sous la forme

$$P_\alpha = \frac{d}{dt} \Sigma m \left(x' \frac{\partial x'}{\partial q'_\alpha} + y' \frac{\partial y'}{\partial q'_\alpha} + z' \frac{\partial z'}{\partial q'_\alpha} \right) - \\ - \Sigma m \left(x' \frac{\partial x'}{\partial q_\alpha} + y' \frac{\partial y'}{\partial q_\alpha} + z' \frac{\partial z'}{\partial q_\alpha} \right)$$

$$P_\alpha = \frac{d}{dt} \Sigma \frac{1}{2} m \frac{\partial (x'^2 + y'^2 + z'^2)}{\partial q'_\alpha} - \Sigma \frac{1}{2} m \frac{\partial (x'^2 + y'^2 + z'^2)}{\partial q_\alpha}$$

ou

$$P_\alpha = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}$$

Les équations (3) s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= Q_1 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= Q_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} &= Q_k \end{aligned} \qquad (3)$$

Ce sont les <u>équations de Lagrange</u>.

Pour les former, on calcule la force vive $2T$ du système, et ses dérivées par rapport à $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$, $q_1, q_2, \ldots, q_k$; puis on calcule le travail des forces directement appliquées. Les quantités $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ sont les coefficients de $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$, dans l'expression de ce travail élémentaire :

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots\ldots + Q_k \delta q_k .$$

Remarquons que l'un des termes de cette expression $Q_1 \delta q_1$, par exemple, représente le travail lorsque le paramètre q_1 varie seul.

Les équations de Lagrange sont des équations différentielles du second ordre en $q_1, q_2, \ldots, q_k$; elles possèdent un système de solutions déterminées par les conditions initiales, qui sont les valeurs $q_1^\circ\ q_2^\circ \ldots q_k^\circ\ q_1'^\circ\ q_2'^\circ \ldots q_k'^\circ$ de $q_1\ q_2 \ldots q_k$ et de leurs dérivées $q_1'\ q_2' \ldots q_k'$ à instant initial $t = t_0$.

116 — **Cas particulier.** — Supposons que les forces directement appliquées X, Y, Z dépendent d'une fonction de forces que l'on peut exprimer en fonction des paramètres $q_1, q_2 \ldots q_k$, soit

$$U(q_1, q_2, \ldots, q_k)$$

L'expression du travail élémentaire est alors :

$$dU = \frac{\partial u}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial u}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial q_k}\delta q_k$$

et les équations de Lagrange prennent la forme

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{\partial q'_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial u}{\partial q_\alpha}} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k.)$$

Supposons que les liaisons soient indépendantes du temps.

On sait que dans ce cas, le théorème des forces vives donne $T = U + h$; montrons donc que cette équation est une conséquence des équations de Lagrange.

Multiplions la première de ces équations par q_1', la deuxième par q_2', etc..., la $k^{ième}$ par q_k', et ajoutons, il vient :

$$\sum q'_\alpha \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right) - \sum \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} q'_\alpha = \sum \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} q'_\alpha$$

Or

$$q'_\alpha \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right) = \frac{d}{dt}\left(q'_\alpha \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} q''_\alpha$$

d'où $\frac{d}{dt}\sum q'_\alpha \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} - \sum\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} q''_\alpha + \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} q'_\alpha\right) = \sum \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} q'_\alpha$.

Mais, d'après la relation d'Euler pour les fonctions homogènes,

$$\sum' q'_\alpha \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} = 2T ;$$

d'autre part

$$\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} q''_\alpha + \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} q'_\alpha = \frac{dT}{dt} ,$$

et

$$\sum \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} q'_\alpha = \frac{dU}{dt}$$

La relation précédente s'écrit donc :

$$\frac{d(2T)}{dt} - \frac{dT}{dt} = \frac{dU}{dt}$$

ou

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dU}{dt}$$

$$T = U + h$$

Remarque. — Les équations de Lagrange conservent la même forme si U dépend du temps.

117 — Paramètres surabondants. — Nous avons supposé que les K paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_K$ étaient indépendants ; supposons maintenant que ces K paramètres soient liés par r relations

$$\varphi_1(q_1, q_2, \ldots, q_K, t) = 0$$
$$\varphi_2(q_1, q_2, \ldots, q_K, t) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_r(q_1, q_2, \ldots, q_K, t) = 0$$

on dit alors que les paramètres $q_1, \ldots q_K$ sont surabondants.

Supposons que le tableau des dérivés

$$\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q_\nu} \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, r \qquad \nu = 1, 2, \ldots, k$$

soit de rang r c'est-à-dire qu'on puisse en extraire un déterminant d'ordre r qui ne soit pas identiquement nul. On peut toujours supposer que c'est le déterminant

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r)}{D(q_1, q_2, \ldots, q_r)}$$

en changeant au besoin les indices. Il y a alors $K-r$ paramètres indépendants $q_{r+1}, q_{r+2}, \ldots, q_K$ et on pourra exprimer les dérivées $q'_1, q'_2, \ldots, q'_K$ en fonction de $q'_{r+1}, q'_{r+2}, \ldots, q'_K$.

Le principe de D'Alembert donnera, comme précédemment, la relation

$$(4) \quad (P_1 - Q_1)\delta q_1 + (P_2 - Q_2)\delta q_2 + \ldots + (P_K - Q_K)\delta q_K = 0$$

où les variables $\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_K$ ne sont plus indépendantes, mais liées par les relations obtenues en différentiant les relations $\varphi = 0$, t restant constant, puisqu'il s'agit d'un déplacement virtuel

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_K}\delta q_K = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial \varphi_r}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_K}\delta q_K = 0$$

Multiplions les premiers membres des relations précédentes, respectivement par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ et retranchons de (4), il vient :

$$(5) \quad \begin{aligned}
&\left(P_1 - Q_1 - \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1} - \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1} - \ldots - \lambda_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_1}\right)\delta q_1 \\
&+ \left(P_2 - Q_2 - \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2} - \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_2} - \ldots - \lambda_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_2}\right)\delta q_2 \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \left(P_r - Q_r - \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_r} - \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_r} - \ldots - \lambda_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_r}\right)\delta q_r \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \left(P_K - Q_K - \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_K} - \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_K} - \ldots - \lambda_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_K}\right)\delta q_K = 0
\end{aligned}$$

Cette relation doit être vérifiée quels que soient les nombres $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_K$ satisfaisant aux r relations $\varphi = 0$.

Déterminons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ par les conditions

$$P_1 = Q_1 + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1} + \ldots + \lambda_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_1},$$

$$P_2 = Q_2 + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_2} + \ldots + \lambda_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_2} \qquad (6)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P_r = Q_r + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_r} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_r} + \ldots + \lambda_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_r}$$

cette détermination est possible, car, dans ce système de r équations du premier degré à r inconnues $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_r$, le déterminant des inconnues est

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r)}{D(q_1, q_2, \ldots, q_r)}$$

et nous l'avons supposé différent de zéro.

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$ étant ainsi déterminés, les coefficients de $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_r$ dans l'équation (5) sont nuls ; il reste les termes en $\delta q_{r+1}, \delta q_{r+2}, \ldots, \delta q_K$, qui sont des variables indépendantes ; il faut et il suffit que leurs coefficients soient nuls, ce qui donne

$$P_{r+1} = Q_{r+1} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_{r+1}} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_{r+1}} + \ldots + \lambda_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_{r+1}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (7)$$

$$P_K = Q_K + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_K} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_K} + \ldots + \lambda_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_K}.$$

Les K équations (6) et (7) jointes aux r équations

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \ldots \varphi_r = 0,$$

donnent $K + r$ équations à $K + r$ inconnues $q_1, q_2, \ldots q_K$;

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$; le mouvement du système est donc déterminé.

Cette méthode est appelée la <u>méthode des multiplicateurs de Lagrange</u>.

<u>Cas particulier où l'on prend comme paramètres les coordonnées des n points du système</u>. — Soient $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n$ les $3n$ coordonnées de ces points.

La force vive est

$$2T = \sum m (x'^2 + y'^2 + z'^2),$$

d'où :

$$\frac{\partial T}{\partial x'} = m x', \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

Le premier membre de l'équation de Lagrange relative au paramètre x est donc :

$$P = m x''.$$

D'autre part, les conditions de liaison sont :

$$\varphi_1 (x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, t) = 0$$
$$\varphi_2 (x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, t) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_r (x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, t) = 0$$

Les équations de Lagrange s'écrivent donc, avec les multiplicateurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$

$$m x'' = X + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \ldots + \lambda_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x}$$

$$m y'' = Y + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \ldots + \lambda_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial y}$$

$$m z'' = Z + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \ldots + \lambda_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial z}$$

pour chaque point x, y, z, ce qui donne $3n$ équations.

Si par exemple, le point x, y, z doit se déplacer sur une surface dont l'équation est $\varphi_1 (x, y, z) = 0$,

$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$ représentent un vecteur porté par la normale ; les termes correspondants $\lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$, $\lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}$, $\lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$ désignent les composantes de la réaction de la surface

---

Chapitre III

Exercices d'application des équations de Lagrange

118_ Liaisons indépendantes du temps. — Reprenons le problème des ciseaux, c'est-à-dire du mouvement de deux tiges AB et A'B' articulées en O, pouvant tourner librement autour de O et se déplaçant dans un plan vertical (fig. 155).

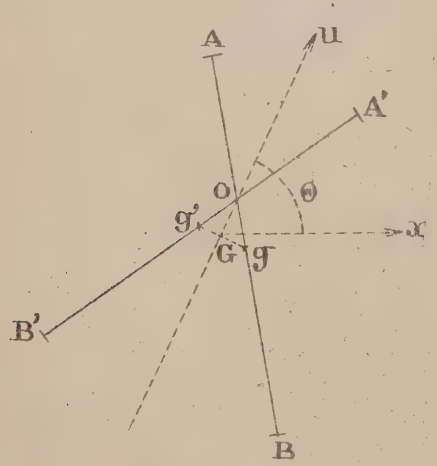

Fig. 155

Les paramètres fixant la position du système sont les coordonnées ξ, η du centre de gravité G du système par rapport à deux axes fixes $O\xi$, $O\eta$ dans ce plan vertical, le demi-angle d'ouverture α des ciseaux, et l'inclinaison θ de l'axe bissecteur Gu sur l'horizontale Gx, soient

$$q_1 = \xi\,, \quad q_2 = \eta\,; \quad q_3 = \theta\,, \quad q_4 = \alpha.$$

Le poids étant $2mg$, la fonction de forces est :

$$U = -2mg\,\eta$$

Calculons la force vive $2T$ du système en appliquant le théorème de König.

La force vive du centre de gravité est

$$2m(\xi'^2 + \eta'^2).$$

Cherchons ensuite la force vive de chaque barre dans son mouvement autour du centre de gravité G. On a pris

$$Og = \lambda = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

Les coordonnées polaires de g par rapport à Gx étant $\lambda \sin\alpha$ et $\theta - \frac{\pi}{2}$, et la tige AB tournant autour de g avec la vitesse angulaire $\theta' + \alpha'$, la force vive de la tige AB par rapport à G est, en appliquant le théorème de König,

$$m(\lambda^2 \cos^2\alpha . \alpha'^2 + \lambda^2 \sin^2\alpha . \theta'^2) + mK^2(\theta' + \alpha')^2$$

Celle de la tige $A'B'$ est :

$$m(\lambda^2 \cos^2\alpha . \alpha'^2 + \lambda^2 \sin^2\alpha\, \theta'^2) + mK^2(\theta' - \alpha')^2$$

La force vive relative du système des deux tiges est comme $K^2 = \frac{l^2}{3} = \lambda^2$,

$$2m\lambda^2\left[(1+\cos^2\alpha)\alpha'^2 + (1+\sin^2\alpha)\theta'^2\right]$$

d'où, pour la force vive totale,

$$2T = 2m(\xi'^2 + \eta'^2) + 2m\lambda^2\left[(1+\cos^2\alpha)\alpha'^2 + (1+\sin^2\alpha)\theta'^2\right].$$

Les équations de Lagrange sont :

Pour le paramètre ξ,

$$\frac{\partial T}{\partial \xi'} = 2m\xi' \,, \qquad \frac{\partial T}{\partial \xi} = 0 \,, \qquad \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \,;$$

$$\xi'' = 0 \qquad (1)$$

Pour le paramètre η,

$$\frac{\partial T}{\partial \eta'} = 2m\eta' , \quad \frac{\partial T}{\partial \eta} = 0 , \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = -2mg ;$$

$$\eta'' = -g \qquad (2)$$

Pour le paramètre θ,

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = 2m\lambda^2(1+\sin^2\alpha)\theta' , \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 , \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 ;$$

$$\frac{d}{dt}\left[(1+\sin^2\alpha)\theta'\right] = 0 \qquad (3)$$

Pour le paramètre α,

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha'} = 2m\lambda^2(1+\cos^2\alpha)\alpha' , \quad \frac{\partial T}{\partial \alpha} = 2m\lambda^2 \sin\alpha\cos\alpha(\theta'^2 - \alpha'^2) ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0 ;$$

$$\frac{d}{dt}\left[(1+\cos^2\alpha)\alpha'\right] - \sin\alpha\cos\alpha(\theta'^2 - \alpha'^2) = 0 \qquad (4)$$

Cette dernière équation est la moins simple des quatre ; nous la remplacerons par l'intégrale première des forces vives

$$T = U + C^{te}$$

ou

$$(5) \quad m(\xi'^2 + \eta'^2) + m\lambda^2\left[(1+\cos^2\alpha)\alpha'^2 + (1+\sin^2\alpha)\theta'^2\right] = -2mg\eta + h.$$

Les trois premières équations donnent :

$$\left|\begin{array}{l} \xi = \xi_0 + \xi_0' \, t \\ \eta = -\frac{1}{2} g t^2 + \eta_0' t + \eta_0 . \\ (1+\sin^2\alpha)\theta' = C . \end{array}\right.$$

On a donc :

$$\eta'^2 = -2g\eta + C^{te}$$

L'équation (5) se réduit donc à

$$(1+\cos^2\alpha)\alpha'^2 + (1+\sin^2\alpha)\theta'^2 = h.$$

On retrouve les quatre équations obtenues au paragraphe

par l'application des théorèmes généraux de la Mécanique.

119 — Liaisons dépendant du temps. — Soit (fig. 156) une barre AB de poids négligeable située dans un plan vertical (P) qui tourne autour d'une verticale Oz_1 de ce plan, d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire ω.

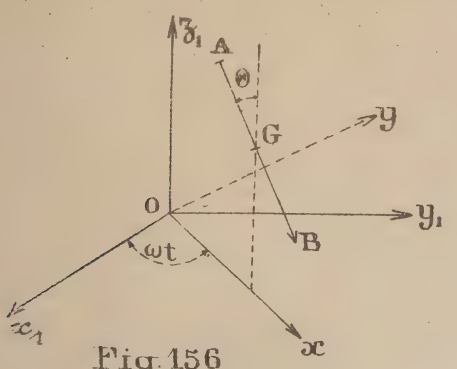

Fig. 156

La position de la barre est fixée dans le plan par les valeurs des coordonnées ξ, ζ de son centre de gravité G par rapport aux deux axes Ox et Oz_1 de ce plan et par l'angle θ de la barre avec la verticale ascendante. Le système dépend donc des trois paramètres ξ, ζ, θ et du temps par l'intermédiaire de la liaison qui exprime que l'angle (Ox, Ox_1) est égal à ωt, si l'on prend comme plan $x_1 O z_1$, la position de (P) pour $t = 0$.

Il n'y a pas de forces directement appliquées ; seules interviennent les forces de liaison ; la fonction des forces est donc $U = 0$.

Calculons la force vive $2T$ du système, en appliquant le théorème de König.

Les coordonnées semi-polaires du centre de gravité G sont ξ, ωt, ζ ; sa force vive est donc

$$m(\xi'^2 + \omega^2 \xi^2 + \zeta'^2)$$

Calculons ensuite la force vive de la barre dans son mouvement par rapport à des axes $Gx_0 y_0 z_0$ parallèles aux axes fixes Ox, y, z_1 et emportés par le centre de

gravité G ; on peut, pour ce calcul, employer deux méthodes.

1ère méthode. — Introduisons les angles d'Euler.

Prenons (fig. 157) la tige AB pour axe Oz ; elle fait l'angle θ avec l'axe vertical Gz_0 et la perpendiculaire Gu au plan Gzz_0 fait l'angle ψ avec Gx_0 ; le plan vertical de la barre est le plan Gzz_0 dont la trace Gv_1 sur le plan des $x_0 y_0$ fait avec Gx_0 l'angle $\psi + \frac{\pi}{2} = \omega t$.

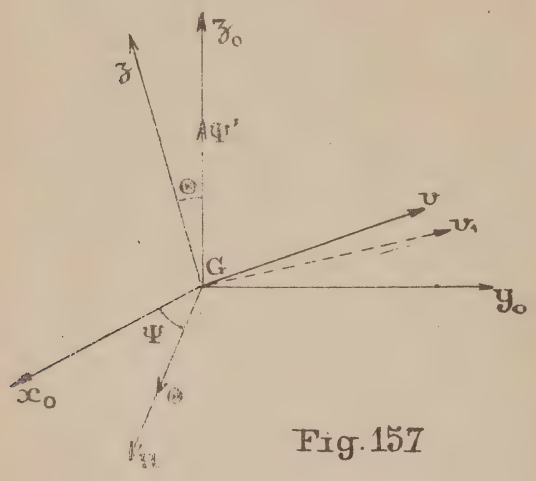

Fig. 157

Les rotations sont : la rotation ψ' portée par l'axe Gz_0, et la rotation θ' portée par l'axe Gu.

Les composantes de la rotation sur les axes $Guvz$ sont donc :

$$p = \theta', \quad q = \psi' \sin\theta$$
$$r = \psi' \cos\theta .$$

L'ellipsoïde d'inertie en G est un cylindre de révolution d'axe Gz : on a $A = B$, $C = 0$.

La force vive est :

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = A(\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2\theta)$$

A est le moment d'inertie d'une tige de longueur $2l$, par rapport à son milieu : sa valeur est $\frac{ml^2}{3}$.

2ème méthode. — Le mouvement de la barre peut être considéré comme résultant du mouvement relatif de la barre dans le plan vertical Gzx et du mouvement d'entraînement du plan Gzx, qui est un mouvement de rotation autour de Gz_0. La vitesse d'un point de la barre est la somme géométrique de la vitesse relative de ce point dans le mouvement par rapport au plan entraîné Gxz, et de la vitesse d'entraînement, c'est-à-dire

de la vitesse du point du plan qui coïncide à l'instant t avec le point de la tige considérée. Ces deux vitesses étant perpendiculaires, le carré de la vitesse absolue est égal à la somme des carrés de la vitesse d'entraînement et de la vitesse relative ; donc la force vive absolue est égale à la somme de la force vive relative et de la force vive d'entraînement.

Or, la force vive relative est $A\theta'^2$.

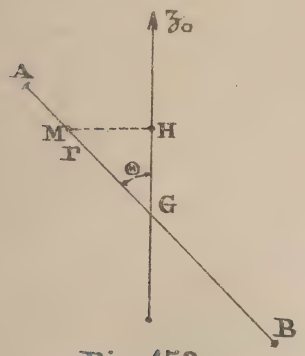

Fig. 158

D'autre part (fig. 158), dans le mouvement d'entraînement, chaque élément M de la barre décrit autour de Gz_0 un cercle de rayon

$$MH = r\sin\theta,$$

r désignant la distance GM.

La force vive de ce point est, si μ désigne la masse,

$$\mu r^2 \sin^2\theta\,\omega^2,$$

ce qui donne, pour la tige :

$$\omega^2 \sin^2\theta \sum \mu r^2 = A\omega^2 \sin^2\theta.$$

La force vive est donc :

$$A(\theta'^2 + \omega^2 \sin^2\theta).$$

Comme $\psi = \omega t - \frac{\pi}{2}$, $\psi' = \omega$, et l'on retrouve bien l'expression $A(\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2\theta)$.

La force vive totale est ainsi

$$2T = m\left[\xi'^2 + \omega^2\xi^2 + \zeta'^2\right] + \frac{ml^2}{3}(\omega^2\sin^2\theta + \theta'^2).$$

Écrivons les équations de Lagrange :

Pour le paramètre ξ,

$$\frac{\partial T}{\partial \xi'} = m\xi', \quad \frac{\partial T}{\partial \xi} = m\omega^2\xi \; ; \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$$

$$\xi'' - \omega^2\xi = 0 \qquad (1)$$

Pour le paramètre ζ,

$$\frac{\partial T}{\partial \zeta'} = m\zeta', \quad \frac{\partial T}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \zeta} = 0, \qquad \zeta'' = 0 \qquad (2)$$

Pour le paramètre θ,

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = \frac{ml^2}{3}\theta', \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{ml^2}{3}\omega^2 \sin\theta\cos\theta, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$$

$$\theta'' - \omega^2 \sin\theta\cos\theta = 0. \qquad (3)$$

Intégrons ces équations ; les deux premières donnent :

$$\xi = A\,\mathrm{Ch}\,\omega t + B\,\mathrm{Sh}\,\omega t,$$

$$\zeta = at \quad \text{en supposant} \quad \zeta_0 = 0$$

ce qui est possible par un choix convenable du plan x, Oy.

La troisième équation s'écrit :

$$2\theta'\theta'' = 2\omega^2 \sin\theta\cos\theta\,\theta';$$

on en déduit l'intégrale première

$$\theta'^2 = \omega^2 \sin^2\theta + \lambda$$

$$dt = \pm \frac{d\theta}{\sqrt{\omega^2 \sin^2\theta + \lambda}}$$

Les expressions de ξ et ζ en fonction de t déterminent la trajectoire du centre de gravité dans le plan mobile ; on a l'équation de cette courbe en éliminant t

$$\xi = A\,\mathrm{Ch}\,\frac{\omega\zeta}{a} + B\,\mathrm{Sh}\,\frac{\omega\zeta}{a}$$

Déterminons A et B par les conditions initiales :

$\xi_0 = 0$, $\xi'_0 = a$, ξ_0 et ξ'_0 arbitraires.

En portant ces valeurs dans ξ et dans ξ' :

$$\xi' = \frac{A\omega}{a}\,\mathrm{Sh}\,\frac{\omega\zeta}{a} + \frac{B\omega}{a}\,\mathrm{Ch}\,\frac{\omega\zeta}{a},$$

on obtient

$$\xi = \xi_0\,\mathrm{Ch}\,\frac{\omega\zeta}{a} + \frac{a\,\xi'_0}{\omega}\,\mathrm{Sh}\,\frac{\omega\zeta}{a}$$

Si l'on suppose en particulier $\xi'_0 = 0$, c'est-à-dire la vitesse initiale parallèle à Oz, l'équation précédente sera celle de la projection d'une chaînette ; on aurait

une chaînette (fig. 159) si :

$$\zeta_0 = \frac{a}{\omega},$$

l'équation s'écrirait alors :

$$\frac{\omega \zeta}{a} = \mathrm{Ch}\,\frac{\omega \zeta}{a}$$

Etudions les variations de θ.

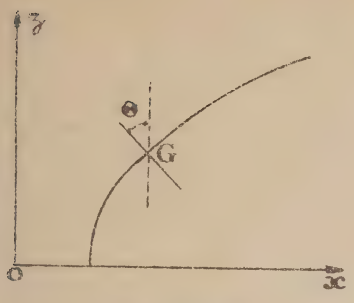

Fig. 159

On a :

$$\lambda = \theta_0'^2 - \omega^2 \sin^2 \theta_0$$

Pour que le dénominateur de dt s'annule, il faut que l'on ait :

$$-1 \leqslant \frac{\lambda}{\omega^2} \leqslant 0$$

Or

$$\frac{\lambda}{\omega^2} = \frac{\theta_0'^2}{\omega^2} - \sin^2 \theta_0$$

est toujours supérieur à -1 ; il suffit donc d'écrire $\frac{\lambda}{\omega^2} < 0$, ce qui donne :

$$\theta_0'^2 < \omega^2 \sin^2 \theta_0 \ ;$$

On peut supposer θ_0' positif ; la condition s'écrit :

$$\theta_0' < |\omega \sin \theta_0|$$

Si cette condition est vérifiée, le dénominateur de dt s'annule pour une valeur α de θ, qui est une racine simple ; la tige oscille et θ varie entre $-\alpha$ et $+\alpha$.

Si le dénominateur ne peut s'annuler, la tige s'éloigne en tournant indéfiniment dans le même sens autour du centre de gravité G.

Remarque. — La méthode des équations de Lagrange est très générale ; s'appliquant à tous les problèmes, elle peut masquer les particularités d'un problème particulier. Aussi, il y a toujours intérêt à appliquer les théorèmes généraux de la mécanique (théorème

du mouvement du centre de gravité, théorème du moment cinétique) pour mieux se rendre compte des conditions du mouvement.

Chapitre IV

Stabilité de l'équilibre. Petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable.

120- Recherche des positions d'équilibre. — Supposons toujours que les liaisons soient sans frottement et indépendantes du temps.

Cherchons les positions d'équilibre d'un système en appliquant le principe des travaux virtuels : si $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_K$ représentent un déplacement virtuel compatible avec les liaisons, pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que le travail des forces directement appliquées soit nul pour ce déplacement, ce qui donne :

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_K \delta q_K = 0$$

Si les K paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_K$ sont indépendants, l'équilibre aura lieu pour :

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \ldots, Q_K = 0$$

On a ainsi K équations pour déterminer les K paramètres $q_1, \ldots, q_K$.

Si les paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_K$, ne sont pas indépendants, mais liés par r relations :

$$\varphi_1(q_1, q_2, \ldots, q_K) = 0.$$
$$\varphi_2(q_1, q_2, \ldots, q_K) = 0.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_r(q_1, q_2, \ldots, q_K) = 0.$$

on peut introduire les multiplicateurs de Lagrange $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$; on obtient ainsi les $K+r$ équations

$$Q_1 + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1} + \ldots + \lambda_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_1} = 0$$

$$Q_2 + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_2} + \ldots + \lambda_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_2} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Q_K + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_K} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_K} + \ldots + \lambda_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_r} = 0$$

$$\varphi_1(q_1, q_2, \ldots, q_K) = 0.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_r(q_1, q_2, \ldots, q_K) = 0.$$

pour déterminer les $K+r$ inconnues $q_1, q_2, \ldots, q_K, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$.

Supposons en particulier que les forces extérieures dépendent d'une fonction de forces

$$U(q_1, q_2, \ldots, q_K) ;$$

l'expression du travail pour le déplacement $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_K$ est alors :

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2} \delta q_2 + \ldots + \frac{\partial U}{\partial q_K} \delta q_K$$

Les conditions d'équilibre deviennent :

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \\ \dfrac{\partial U}{\partial q_2} = 0, \\ \ldots\ldots \\ \dfrac{\partial U}{\partial q_K} = 0. \end{cases}$$

Ce sont les équations qui servent à la recherche des maxima et minima de la fonction U des K variables $q_1, q_2, \ldots, q_K$.

Inversement, si l'on trouve une solution $q_1, q_2, \ldots, q_K$, du système (1), la valeur de U peut être soit maximum, soit minimum, mais peut aussi n'être ni maximum ni minimum.

Nous pouvons supposer que les valeurs $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \ldots, \bar{q}_K$, d'une solution du système (1), sont toutes nulles; en effet, il suffirait de changer de paramètres et de prendre

$$q_1 - \bar{q}_1 \ , \quad q_2 - \bar{q}_2 \ , \ \ldots \ , \ q_K - \bar{q}_K$$

comme nouveaux paramètres.

On peut supposer aussi que la valeur correspondante de U est nulle, car U n'est définie qu'à une constante additive près; on a ainsi :

$$U(0, 0, \ldots, 0) = 0 .$$

Développons U suivant la formule de Mac-Laurin :

$$U(q_1, q_2, \ldots, q_K) = U(0, 0, \ldots, 0) + q_1 \left(\frac{\partial U}{\partial q_1}\right)_0 + q_2 \left(\frac{\partial U}{\partial q_2}\right)_0 + \ldots$$

$$\ldots + q_K \left(\frac{\partial U}{\partial q_K}\right)_0 + \frac{1}{2}\left[q_1^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\right)_0 + \ldots + q_K^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_K^2}\right)_0\right] + \ldots ,$$

ce qui s'écrit, d'après ce qui précède,

$$U(q_1, q_2, \ldots, q_K) = \frac{1}{2}\left[q_1^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\right)_0 + \ldots + q_K^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_K^2}\right)_0\right] + \ldots$$

Pour que $U(0, 0, \ldots, 0)$ soit un maximum, il faut et il suffit que la forme quadratique entre crochets soit une forme définie négative, c'est-à-dire garde toujours le signe <u>moins</u>. $U(0, 0, \ldots, 0)$ sera minimum, si la forme est définie positive; $U(0, 0, \ldots, 0)$ ne sera ni minimum ni maximum si la forme peut changer de signe.

121 — **Recherche des positions d'équilibre stable.** — On dit que l'on a une position d'équilibre stable si, en déplaçant très peu le corps et lui imprimant de petites vitesses initiales, le corps demeure indéfiniment au voisinage de sa position d'équilibre. D'une façon plus précise, la solution $q_1 = q_2 = \ldots = q_k = 0$ correspond à une position d'équilibre stable, si, étant donné un nombre positif ε, on peut lui faire correspondre un nombre positif η tel que, si les conditions initiales satisfont aux inégalités

$$|q_1^0| < \eta, \quad |q_2^0| < \eta, \ldots, |q_k^0| < \eta;$$
$$|q_1'^0| < \eta, \quad |q_2'^0| < \eta, \ldots, |q_k'^0| < \eta,$$

on ait, pendant toute la durée du mouvement,

$$|q_1| < \varepsilon, \quad |q_2| < \varepsilon, \ldots, |q_k| < \varepsilon.$$

Par exemple, la position d'équilibre du pendule est une position d'équilibre stable.

Pour reconnaître les positions d'équilibre stable, on peut utiliser le théorème suivant :

122 — **Théorème de Lejeune-Dirichlet.** — *Si la fonction U est maximum, l'équilibre est stable.* —

1°. *Système à deux paramètres* : $q_1 q_2$. — Employons une image géométrique. Soient trois axes $Oq_1 q_2 U$ (fig. 160); l'équation $U = U(q_1, q_2)$ représente une surface passant par l'origine puisque, par hypothèse $U(0,0) = 0$ et tangente en ce point au plan $Oq_1 q_2$.

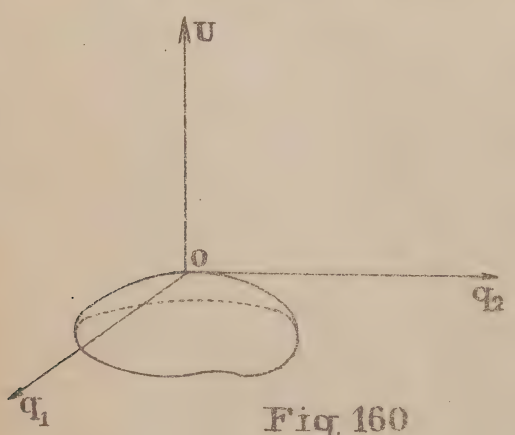

Fig. 160

Comme nous supposons U maximum en O, la surface est coupée par le cylindre

$$q_1^2 + q_2^2 = \varepsilon^2$$

suivant une courbe située tout entière au-dessous du plan des $q_1\, q_2$, et, en tous les points de cette courbe, la cote U a une valeur négative. Soit $-\mu\,(\mu > 0)$ le maximum de cette cote.

Prenons le point $q_1^\circ,\ q_2^\circ$ à l'intérieur du cercle (C) de rayon ε, section du cylindre par $Oq_1 q_2$ et imprimons au corps la vitesse initiale définie par $q_1'^\circ,\ q_2'^\circ$. Le théorème des forces vives donne

$$\sum \frac{1}{2} m v^2 = U + h\ ;$$

d'après cette égalité, on a : $U + h \geqslant 0$; or,

$$h = T_0 - U_0 = \Phi(q_1^\circ,\ q_2^\circ,\ q_1'^\circ,\ q_2'^\circ)\ ;$$

Φ est nulle pour $q_1^\circ = q_2^\circ = q_1'^\circ = q_2'^\circ = 0$, car, pour ces valeurs, on a $U_0 = 0$ par hypothèse, et d'autre part, T_0 qui est une forme quadratique en $q_1'^\circ,\ q_2'^\circ$, s'annule avec ces variables. Comme Φ est une fonction continue, étant donné le nombre μ, on pourra trouver un nombre η, tel que, si l'on prend

$$|q_1^\circ| < \eta\ ,\quad |q_2^\circ| < \eta\ ,\quad |q_1'^\circ| < \eta\ ,\quad |q_2'^\circ| < \eta\ .$$

on ait :

$$h < \mu\ .$$

Supposons donc que les conditions initiales vérifient ces inégalités, la position de départ correspondant à un point à l'intérieur du cercle (C) de rayon ε ; montrons que pendant le mouvement, le point figuratif (q_1, q_2) reste à l'intérieur de ce cercle, c'est-à-dire qu'on a toujours

$$|q_1| < \varepsilon\ ,\qquad |q_2| < \varepsilon$$

Dans le cas contraire, le point figuratif traverserait le cercle (C), on aurait à ce moment

$$U + \mu \leqslant 0,$$

ce qui est impossible car l'inégalité $h < \mu$ entraîne $U + \mu > U + h \geqslant 0$; le point représentatif ne peut donc pas sortir du cercle (C).

2°- <u>Système à trois paramètres</u> : q_1, q_2, q_3. — Représentons le champ des paramètres, au moyen de trois axes $Oq_1\, q_2\, q_3$. Supposons, comme précédemment, que U prenne sa valeur maximum, supposée nulle pour

$$q_1 = q_2 = q_3 = 0.$$

Considérons la sphère de rayon ε (fig. 161) :

$$(S)\quad q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = \varepsilon^2$$

Pour tout point $q_1\, q_2\, q_3$ à la surface de cette sphère (S), U est négatif.

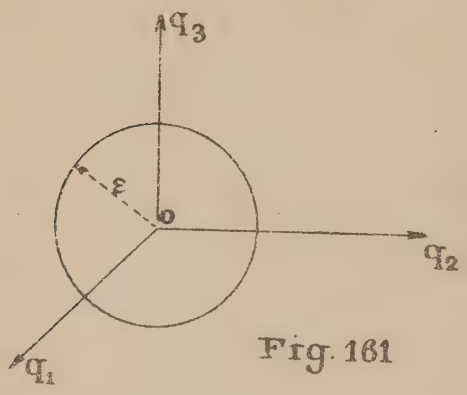

Fig. 161

Soit $-\mu$ ($\mu > 0$) le maximum de U sur la surface de (S).

Prenons un point $M_0(q_1^\circ, q_2^\circ, q_3^\circ)$ à l'intérieur de (S); imprimons au système les vitesses initiales définies par $q_1'^\circ, q_2'^\circ, q_3'^\circ$. Le mouvement satisfait au théorème des forces vives :

$$\Sigma \frac{1}{2} m v^2 = U + h,$$

d'où

$$U + h \geqslant 0$$

avec

$$h = T_0 - U_0 = \Phi(q_1^\circ, q_2^\circ, q_3^\circ, q_1'^\circ, q_2'^\circ, q_3'^\circ).$$

Φ est une fonction nulle pour $q_1^0 = q_2^0 = q_3^0 = 0$
$q_1^c = q_2^c = q_3^c = 0$; comme Φ est une fonction continue, on peut, étant donné μ, déterminer η tel que les inégalités

$$|q_1^0| < \eta, \quad |q_2^0| < \eta, \quad |q_3^0| < \eta$$

$$|q_1^c| < \eta, \quad |q_2^c| < \eta, \quad |q_3^c| < \eta$$

entraînent

$$h < \mu .$$

Prenons le point M_0 à l'intérieur du cube d'arête 2η et de centre O, et à l'intérieur de la sphère de centre O et de rayon η. On aura alors pendant tout le mouvement

$$0 \leq U + h < U + \mu$$

et le point M_0 va décrire une certaine courbe à l'intérieur de la sphère de rayon ε, sans jamais en sortir, car on aurait, au moment du passage $U + \mu \leq 0$, ce qui est en contradiction avec ce qui précède.

L'équilibre est donc bien stable.

3° — Système à K paramètres. — La démonstration est en tous points semblable ; on se sert de l'hypersphère

$$q_1^2 + q_2^2 + \ldots\ldots q_K^2 = \varepsilon^2 .$$

23 — Étude des petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable. —

Systèmes à un paramètre : q. — On les appelle aussi systèmes à liaisons complètes.

Soit $U(q)$ la fonction des forces ; on la suppose maximum et nulle pour $q = 0$; la formule de Mac Laurin donne alors :

$$U = -\frac{1}{2} \alpha q^2 + \ldots .$$

où $\alpha > 0$, puisqu'on a un maximum. La force vive est une forme quadratique en q' :

$$2T = A(q)\, q'^2.$$

Le développement de $A(q)$ par la formule de Mac Laurin est de la forme :

$$A(q) = a + bq + cq^2 + \dots.$$

où $a > 0$, car, au départ, pour $q = 0$, $2T$ doit être positif. On peut donc écrire :

$$2U = -\alpha q^2 + \dots.$$
$$2T = a q'^2 + \dots.$$

et pour avoir le mouvement, il faut écrire l'équation de Lagrange correspondante.

Supposons qu'on remplace ces expressions par leurs parties principales :

$$2U_1 = -\alpha q^2,$$
$$2T_1 = a q'^2,$$

en supposant que q et q' soient des variables infiniment petites du même ordre. Or, d'après un théorème d'analyse, si l'on intègre les équations du mouvement avec U_1 et T_1, on obtient une solution représentant la partie principale de la solution qu'on aurait obtenue si l'on n'avait rien négligé, c'est-à-dire si l'on avait intégré avec U et T.

L'équation de Lagrange correspond à U_1 et T_1 est :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial q'}\right) - \frac{\partial T_1}{\partial q} = \frac{\partial u_1}{\partial q} \quad ;$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial q'} = a q', \quad \frac{\partial T_1}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial q} = -\alpha q \ ;$$

d'où l'équation

$$a q'' = -\alpha q,$$

ou, en posant $\omega^2 = \frac{\alpha}{a} > 0$,

$$q'' + \omega^2 q = 0.$$

L'intégrale de cette équation est :

$$q = q_0 \cos \omega t + \frac{q'_0}{\omega} \sin \omega t \ ;$$

le mouvement autour de la position d'équilibre est donc

oscillatoire, de période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{\alpha}}$$

Exemple : Pendule simple (fig. 162). — Le paramètre est ici $q = \theta$. La fonction des forces est

$$U = mgl\cos\theta - mgl,$$

elle est maximum lorsque $\theta = 0$, c'est-à-dire lorsque M est en A, position la plus basse du centre de gravité. On peut donc écrire :

$$U = -mgl(1-\cos\theta) = -mgl\frac{\theta^2}{2} + \ldots\ldots$$

La force vive est :

$$2T = ml^2\theta'^2.$$

Fig 162

Les formes réduites sont :

$$2U_1 = -mgl\,\theta^2$$

$$2T_1 = 2T = ml^2\theta'^2;$$

l'équation de Lagrange s'écrit donc

$$ml^2\theta'' = -mgl\,\theta$$

ou

$$\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0,$$

dont la solution est :

$$\theta = \theta_0\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t + \theta_0\sqrt{\frac{l}{g}}\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t,$$

ce qui représente un mouvement oscillatoire simple de période

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

12/ — Exemple de système dépendant d'un seul paramètre. — Soit (fig. 163) un disque plan assujetti à rouler sans glisser sur une droite horizontale ; la réaction du sol est oblique ; il y a frottement. La vitesse

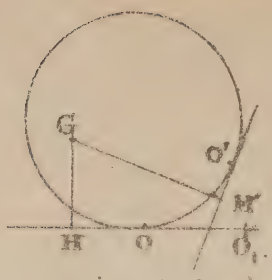

Fig. 163

du point de contact O était nulle, on peut, bien qu'il y ait frottement, appliquer le principe des travaux virtuels, c'est-à-dire écrire les équations de Lagrange.

Cherchons les positions d'équilibre ; elles sont obtenues lorsque le centre de gravité G est le plus bas possible. Nous sommes donc amenés à chercher le minimum des distances GH ou GH', en supposant, sur la figure que ce n'est pas le disque qui a tourné, mais la droite sur laquelle il repose ; nous devons donc mener de G des normales à la podaire, par rapport au point G, de la courbe (C) limitant le disque.

Dans le déplacement de la tangente par rapport au disque, le centre instantané de rotation est à l'intersection I de la normale en G à GH et de normale en A à la courbe (fig. 164) ; la normale à la podaire est donc IH. Pour avoir les normales de G à la podaire, il faut donc que G vienne en I ; on est donc ramené à mener de IG les normales à la courbe (C).

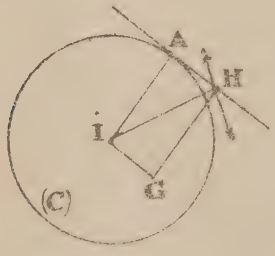

Fig 164

On peut retrouver ce résultat par le calcul.

L'équation de la tangente au disque est

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p(\alpha) = 0 ;$$

la distance du point $G(x_1, y_1)$ à cette droite est

$$U = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p(\alpha) ;$$

pour que U soit maximum ou minimum il faut que

$$\frac{du}{d\alpha} = -x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha - p'(\alpha) = 0 \ ;$$

cette équation exprime que la normale au disque passe par le point $G(x_1, y_1)$.

Les positions d'équilibre sont donc (fig. 165) celles pour lesquelles la normale au disque au point de contact passe par G ; si pour l'une d'elles, U est maximum, la position d'équilibre correspondante sera stable.

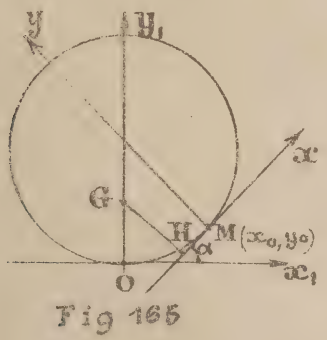

Fig 165

Faisons toujours rouler la base Ox au lieu de déplacer le disque, et soient Mx, My, les axes mobiles entraînés par le point de contact M ; Ox, y_1 étant les axes fixes ; x_0, y_0, les coordonnées de M, on a

$$x_1 = x_0 + x\cos\alpha - y\sin\alpha.$$
$$y_1 = y_0 + x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

d'où

$$GH = y = -(x_1 - x_0)\sin\alpha + (y_1 - y_0)\cos\alpha.$$

Supposons que la position Ox, y_1 des axes mobiles corresponde à un équilibre stable ; posons $OG = h$, la fonction de forces est :

$$U = -mgy + mgh = -mg(y - h),$$

car, pour $y = h$, on doit avoir $U = 0$.

Or, pour G, $x_1 = 0$, $y_1 = h$;

d'où :

$$GH = y = x_0\sin\alpha + (h - y_0)\cos\alpha,$$

et par suite

$$U = -mg\left[x_0\sin\alpha + (h - y_0)\cos\alpha - h\right].$$

L'expression entre crochets peut être considérée comme une fonction $\varphi(s)$ de l'arc $\overset{\frown}{OM} = s$; d'après le choix de U,

on a $\varphi(0) = 0$.

Calculons $\varphi'(s)$; on a

$$dx_0 = ds \cos\alpha$$
$$dy_0 = ds \sin\alpha$$

et

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R} \quad ,$$

d'où

$$\varphi'(s) = \cos\alpha \sin\alpha - \sin\alpha \cos\alpha + \left[x_0 \cos\alpha - (h - y_0) \sin\alpha \right] \frac{1}{R} .$$

ou $$\varphi'(s) = \left[x_0 \cos\alpha - (h - y_0) \sin\alpha \right] \frac{1}{R} \quad ,$$

donc $$\varphi'(0) = 0$$

Puis :

$$\varphi''(s) = \left[\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - x_0 \frac{1}{R} \sin\alpha - (h - y_0) \frac{1}{R} \cos\alpha \right] \frac{1}{R}$$
$$+ \left(\frac{1}{R}\right)' \left[x_0 \cos\alpha - (h - y_0) \sin\alpha \right] ,$$

et $$\varphi''(0) = \left(1 - \frac{h}{R}\right) \frac{1}{R} .$$

D'où le développement de U, d'après la formule de Mac Laurin,

$$U = - \frac{mg}{2R} \left(1 - \frac{h}{R}\right) s^2 + \ldots .$$

Pour étudier les petites oscillations, il faut se borner au premier terme, et pour que U soit maximum il faut que ce premier terme soit négatif, c'est-à-dire que $h < R$.

Le centre de gravité G doit donc être au-dessous du centre de courbure en O.

GH et GM passent en même temps par un minimum. A l'instant t, comme le corps roule sur le sol, le point de contact M est le centre instantané de rotation et tout se passe comme si le disque tournait de l'angle $d\alpha$ autour de M ; or, le moment d'inertie en M est :

$$I_M = I_g + m \overline{GM}^2 = m(K^2 + \overline{GM}^2)$$

K étant le rayon de giration du disque autour de G.

GM se réduit à h pour $\alpha = 0$; d'autre part :

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{s'}{R}$$

et la force vive du disque est

$$2T = I_M \alpha'^2 = \frac{m(h^2 + K^2)}{R^2} s'^2 + \dots$$

D'où les formes réduites

$$2U_1 = -\frac{mg}{R}\left(1 - \frac{h}{R}\right) s^2,$$

$$2T_1 = \frac{mg(h^2 + K^2)}{R^2} s'^2.$$

Écrivons l'équation de Lagrange, le paramètre étant s ; on a :

$$\frac{\partial T_1}{\partial s'} = m\,\frac{h^2 + K^2}{R^2} s' \quad , \quad \frac{\partial U_1}{\partial s} = -\frac{mg}{R}\left(1 - \frac{h}{R}\right) s \quad ,$$

d'où l'équation

$$m\,\frac{h^2 + K^2}{R^2} s'' = -\frac{mg}{R}\left(1 - \frac{h}{R}\right) s$$

ou

$$s'' + \frac{g(R - h)}{h^2 + K^2} s = 0$$

Le mouvement est oscillatoire simple ; en posant :

$$\omega^2 = \frac{g(R - h)}{h^2 + K^2} \quad ,$$

la période est :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{h^2 + K^2}{g(R - h)}}$$

<u>Application</u>. - <u>Disque demi-circulaire</u> (fig. 166). La position d'équilibre est obtenue lorsque l'axe de symétrie CG est vertical. Le théorème de Guldin, appliqué à la rotation du disque autour du diamètre AB, nous donne la valeur de $CG = d$:

$$2\pi d \times \frac{\pi R^2}{2} = \frac{4}{3}\pi R^3, \text{ d'où } \quad d = \frac{4R}{3\pi}$$

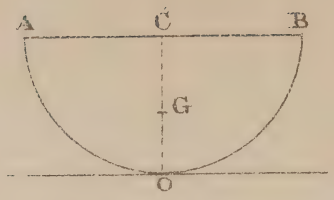

Fig 166

La densité du disque étant supposée égale à 1, on a :

$$I_G = I_c - \frac{\pi R^2}{2} d^2 ;$$

or

$$I_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi R^4}{4},$$

d'où

$$I_G = \frac{\pi R^2}{2} \left(\frac{R^2}{2} - d^2 \right),$$

et par suite le rayon de giration $k^2 = \frac{R^2}{2} - d^2$.

Donc :

$$\omega^2 = \frac{g d}{(R-d)^2 + \frac{R^2}{2} - d^2} = \frac{g d}{\frac{3R^2}{2} - 2Rd} = \frac{g \times \frac{4R}{3\pi}}{R\left(\frac{3R}{2} - \frac{8R}{3\pi}\right)}$$

$$\omega^2 = \frac{4g}{R\left(\frac{9\pi}{2} - 8\right)} = \frac{g}{R} \cdot \frac{8}{9\pi - 16}$$

d'où la période :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g} \cdot \frac{9\pi - 16}{8}}$$

Remarque. — Si le disque peut rouler et glisser, la fonction $U(q_1, q_2)$ ne dépend pas des deux paramètres q_1, q_2 qui fixent la position du système ; on ne peut plus alors appliquer le théorème de Lejeune-Dirichlet.

Si en effet U ne dépend pas de q_1 par exemple, on a :

$$U(0, q_2) = 0$$

ce qui montre que U ne serait pas négatif pour toutes les valeurs des paramètres q_1, q_2, voisines de zéro, mais pourrait être nul.

Ici par exemple, GH, et par suite U, ne dépendent pas du glissement ; c'est-à-dire de l'abscisse variable $q_1 - x$ du point de contact O. Cette remarque s'applique

au cas de K paramètres.

125 — Systèmes à deux paramètres : q_1, q_2. — La force vive est de la forme :

$$2T = Aq_1'^2 + 2Bq_1'q_2' + Cq_2'^2 \quad ;$$

A, B, C sont des fonctions de q_1 et q_2 ; on les développe par la formule de Mac Laurin et on ne conserve que les premiers termes, qui sont les termes constants, a, b, c ; d'où la forme réduite de la force vive :

$$2T_1 = aq_1'^2 + 2bq_1'q_2' + cq_2'^2 .$$

$2T_1$ doit toujours rester positif, donc

$$ac - b^2 > 0$$

De la même façon, on a :

$$U(q_1, q_2) = -\frac{1}{2}(\alpha q_1^2 + 2\beta q_1 q_2 + \gamma q_2^2) + \dots ,$$

la forme quadratique entre parenthèses devant être une forme définie positive,

$$\alpha\gamma - \beta^2 > 0$$

La forme réduite est :

$$-2U_1 = \alpha q_1^2 + 2\beta q_1 q_2 + \gamma q_2^2 .$$

Ecrivons les équations de Lagrange.

$$\frac{\partial T_1}{\partial q_1'} = aq_1' + bq_2' \quad , \quad \frac{\partial U_1}{\partial q_1} = -(\alpha q_1 + \beta q_2) ;$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial q_2'} = bq_1' + cq_2' \quad , \quad \frac{\partial U_1}{\partial q_2} = -(\beta q_1 + \gamma q_2) .$$

d'où

$$aq_1'' + bq_2'' + \alpha q_1 + \beta q_2 = 0$$
$$bq_1'' + cq_2'' + \beta q_1 + \gamma q_2 = 0$$

ou

$$(1) \qquad \begin{aligned} (aq_1'' + \alpha q_1) + (bq_2'' + \beta q_2) &= 0 \\ (bq_1'' + \beta q_1) + (cq_2'' + \gamma q_2) &= 0 . \end{aligned}$$

Cherchons une solution de la forme :

$$q_1 = \lambda \cos(rt + \varphi)$$
$$q_2 = \mu \cos(rt + \varphi)$$

On aura :

$$q_1'' = -r^2 q_1 .$$
$$q_2'' = -r^2 q_2 .$$

et, en portant dans les équations précédentes,

$$\lambda(\alpha - ar^2) + \mu(\beta - br^2) = 0 ,$$
$$\lambda(\beta - br^2) + \mu(\gamma - cr^2) = 0 .$$

Si le déterminant de ces équations en λ, μ n'est pas nul, ces équations ont pour solution

$$\lambda = 0 \quad , \quad \mu = 0$$

c'est-à-dire $\qquad q_1 = 0 \quad ; \quad q_2 = 0 .$

Dans le mouvement, il faut que le déterminant soit nul, c'est-à-dire que

$$\varphi(r^2) = (\alpha - ar^2)(\gamma - cr^2) - (\beta - br^2)^2 = 0 ,$$

les deux équations linéaires en λ, μ se réduisent alors à une seule qui nous donne la valeur du rapport $\frac{\lambda}{\mu}$.

Soit r_1 une solution de l'équation

$$\varphi(r^2) = 0 ,$$

il lui correspond la solution :

$$q_1 = \lambda_1 \cos(r_1 t + \varphi_1)$$
$$q_2 = \mu_1 \cos(r_1 t + \varphi_1) ,$$

φ_1 étant arbitraire. A une autre racine r_2 de

$$\varphi(r^2) = 0 ;$$

correspond la solution :

$$q_1 = \lambda_2 \cos(r_2 t + \varphi_2)$$
$$q_2 = \mu_2 \cos(r_2 t + \varphi_2) ,$$

φ_2 étant arbitraire. Et la solution générale du système (1) est alors

$$q_1 = C_1 \lambda_1 \cos(r_1 t + \varphi_1) + C_2 \lambda_2 \cos(r_2 t + \varphi_2)$$
$$q_2 = C_1 \mu_1 \cos(r_1 t + \varphi_1) + C_2 \mu_2 \cos(r_2 t + \varphi_2)$$

$C_1, C_2, \varphi_1, \varphi_2$ étant les quatre constantes arbitraires, qui doivent figurer dans l'intégrale générale puisque nous avons deux équations différentielles du second ordre.

Montrons que l'équation $\varphi = 0$ a deux racines réelles, c'est-à-dire qu'elle donne pour r^2 des valeurs positives.

On a : $\varphi(0) = \alpha\gamma - \beta^2 > 0$;

$\varphi(+\infty)$ a le signe de $ac - b^2 > 0$

$\varphi\left(\frac{\alpha}{a}\right) = \varphi\left(\frac{\gamma}{c}\right) = -(\beta - bx^2)^2 < 0$

d'où le tableau

x^2	0	$\frac{\alpha}{a}$	$\frac{\gamma}{c}$	$+\infty$
signe de φ	$+$	$-$	$-$	$+$

montrant que l'équation $\varphi = 0$ a bien deux racines positives, sauf si $\varphi\left(\frac{\alpha}{a}\right)$ et $\varphi\left(\frac{\gamma}{c}\right)$ sont tous deux nuls, ce qui exige que l'on ait

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}$$

c'est-à-dire que α, β, γ soient proportionnels à a, b, c.

Examinons ce cas particulier.

Soit $$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c} = \omega^2.$$

Les équations (1) s'écrivent alors :

$$a(q_1'' + \omega^2 q_1) + b(q_2'' + \omega^2 q_2) = 0$$
$$b(q_1'' + \omega^2 q_1) + c(q_2'' + \omega^2 q_2) = 0$$

Le déterminant $ac - b^2$ n'est pas nul ; le système précédent est équivalent au système

$$q_1'' + \omega^2 q_1 = 0$$
$$q_2'' + \omega^2 q_2 = 0$$

qui donne :

$$q_1 = C_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$
$$q_2 = C_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

avec les quatre constantes arbitraires $C_1, C_2, \varphi_1, \varphi_2$.

Exemple. — Soit (fig. 167) un système constitué par un cerceau en fil de fer de centre C oscillant autour d'un point fixe O et un anneau M pouvant glisser sur sa circonférence.

Supposons l'anneau et le cerceau de même masse m. Il faut deux paramètres pour fixer la position

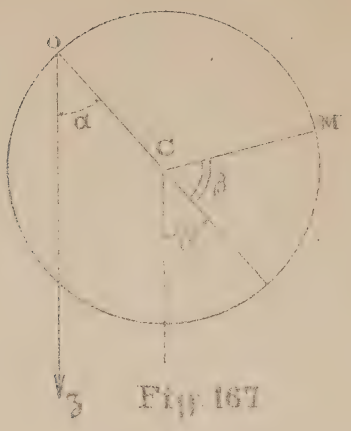

Fig. 167

du système : l'angle α de OC avec la verticale descendante Oz, et l'angle β de CM avec la direction OC.

La position d'équilibre est obtenue lorsque le centre de gravité est le plus bas possible; on a alors $\alpha = \beta = 0$, et les trois points O, C, M sont alignés sur la verticale de O (fig. 168).

Étudions les petites oscillations du système autour de cette position d'équilibre.

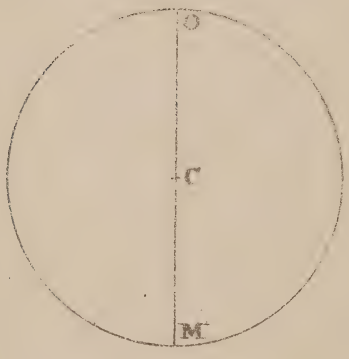

Fig. 168

En appelant z_M et z_C les cotes de M et C, la fonction des forces est

$$U = mg(z_C + z_M) + C^{te}$$

Or, a étant le rayon du cercle :

$$z_C = a \cos \alpha,$$

et, en projetant sur Oz le contour OCM :

$$z_M = a \cos \alpha + a \cos(\alpha + \beta).$$

D'où l'expression U, nulle pour $\alpha = \beta = 0$,

$$U = mg\,a \left[2 \cos \alpha + \cos(\alpha + \beta) \right] - 3 mg a$$

$$U = mg\,a \left[2 \cos \alpha + \cos(\alpha + \beta) - 3 \right]$$

Développons,

$$U = mg\,a \left[2 - \alpha^2 + \ldots + 1 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)^2 + \ldots - 3 \right]$$

ou

$$U = - \frac{mga}{2} \left[2\alpha^2 + (\alpha + \beta)^2 \right] + \ldots$$

La forme réduite est

$$U_1 = -\frac{1}{2} mga\,(3\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2).$$

Calculons la force vive du système.

Le moment d'inertie du cerceau autour de O est :

$$I = I_c + ma^2 = 2ma^2,$$

et la force vive du cerceau, $2ma^2\alpha'^2$.

Les coordonnées polaires de M par rapport à l'axe Oz sont :

$$\theta = \alpha + \frac{\beta}{2}$$

$$r = 2a\cos\frac{\beta}{2} \quad ;$$

d'où, pour la vitesse de l'anneau,

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$v^2 = a^2\sin^2\frac{\beta}{2}\cdot\beta'^2 + 4a^2\cos^2\frac{\beta}{2}\left(\alpha' + \frac{\beta'}{2}\right)^2$$

La force vive du système est donc

$$2T = ma^2\left[2\alpha'^2 + \sin^2\frac{\beta}{2}\cdot\beta'^2 + 4\cos^2\frac{\beta}{2}\left(\alpha' + \frac{\beta'}{2}\right)^2\right];$$

d'où la forme réduite, pour $\alpha = \beta = 0$:

$$2T_1 = ma^2\left[2\alpha'^2 + (2\alpha' + \beta')^2\right],$$

c'est-à-dire

$$2T_1 = ma^2\,(6\alpha'^2 + 4\alpha'\beta' + \beta'^2).$$

Ecrivons et intégrons les équations de Lagrange, on a

$$\frac{\partial T_1}{\partial \alpha'} = ma^2(6\alpha' + 2\beta'). \qquad \frac{\partial T_1}{\partial \beta'} = ma^2(2\alpha' + \beta').$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \alpha} = -mga\,(3\alpha + \beta). \qquad \frac{\partial u_1}{\partial \beta} = -mga\,(\alpha + \beta). \quad ;$$

d'où les équations :

$$3\alpha'' + 2\beta'' = -\frac{g}{a}(3\alpha + \beta),$$

$$2\alpha'' + \beta'' = -\frac{g}{a}(\alpha + \beta),$$

qui peuvent s'écrire

$$3\alpha'' + \beta'' = -\frac{g}{2a}(3\alpha + \beta),$$

$$\beta'' = -\frac{2g}{a}\beta.$$

Prenons comme inconnue auxiliaire :

$$\gamma = 3\alpha + \beta.$$

Le système

$$\gamma' = -\frac{g}{2a}\gamma$$

$$\beta'' = -\frac{2g}{a}\beta$$

s'intègre immédiatement et donne :

$$\gamma = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{2a}}t + \varphi\right),$$

$$\beta = B\cos\left(\sqrt{\frac{2g}{a}}t + \psi\right).$$

on en déduit

$$\alpha = \frac{1}{3}(\gamma - \beta) = \frac{A}{3}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{2a}}t + \varphi\right) - \frac{B}{3}\cos\left(\sqrt{\frac{2g}{a}}t + \psi\right)$$

$$\beta = B\cos\left(\sqrt{\frac{2g}{a}}t + \psi\right)$$

avec quatre constantes arbitraires A, B, φ, ψ.

Les périodes de ces mouvements vibratoires sont :

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}, \quad \text{avec} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{2a}};$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}, \quad \text{avec} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2g}{a}}.$$

d'où

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\sqrt{\frac{2g}{a}}}{\sqrt{\frac{g}{2a}}} = 2;$$

il existe donc une période commune.

Nous avons obtenu ici des équations différentielles à variables séparées par le changement de paramètre $\gamma = 3\alpha + \beta$; nous verrons que, en général, on peut toujours, par un changement de paramètres, obtenir des équations différentielles à variables séparées.

126 — Petites oscillations d'un pendule conique autour de sa position d'équilibre (fig. 169). — La position d'équilibre est obtenue lorsque le point M est au point A, le plus bas de la sphère ; la fonction des forces, qui doit être nulle en A, est :

$$U = mgz - mgl = mg(z - l)$$

Soient x, y, z les coordonnées de M par rapport à trois axes d'origine O ; les paramètres sont :

$$q_1 = x \quad , \quad q_2 = y$$

on a $z^2 = l^2 - x^2 - y^2$

l étant le rayon de la sphère. On en déduit

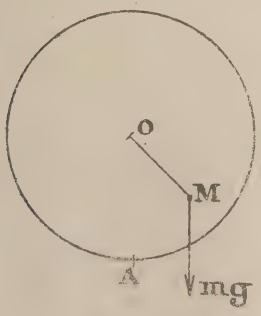

Fig. 169

$$z = l\sqrt{1 - \frac{x^2+y^2}{l^2}} = l\left(1 - \frac{x^2+y^2}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

expression que nous pouvons développer en série, car $x^2 + y^2 < l^2$.

$$z = l\left(1 - \frac{x^2+y^2}{2l^2} + \dots\right),$$

et

$$z - l = -\frac{x^2+y^2}{2l} + \dots,$$

par suite,

$$U = -mg\frac{x^2+y^2}{2l} + \dots$$

$$2U_1 = -\frac{mg}{l}(x^2+y^2).$$

Calculons la force vive

$$2T = mv^2 = m(x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

De la relation

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2,$$

on déduit, par différentiation :

$$x x' + y y' + z z' = 0,$$

c'est-à-dire :

$$z' = -\frac{x x' + y y'}{z},$$

donc

$$z'^2 = \frac{(x x' + y y')^2}{z^2} = \frac{(x x' + y y')^2}{l^2 - x^2 - y^2}$$

d'où :

$$2T = m\left[x'^2 + y'^2 + \frac{(x x' + y y')}{l^2 - x^2 - y^2}\right],$$

la forme réduite, obtenue pour $x = y = 0$, est donc

$$2T_1 = m(x'^2 + y'^2).$$

Écrivons les équations de Lagrange

$$\frac{\partial T_1}{\partial x'} = m x', \qquad \frac{\partial T_1}{\partial y'} = m y',$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{mg}{l} x ; \qquad \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{mg}{l} y ;$$

d'où

$$x'' = -\frac{g}{l} x, \qquad x'' + \frac{g}{l} x = 0,$$

$$y'' = -\frac{g}{l} y, \qquad y'' + \frac{g}{l} y = 0,$$

dont les intégrales sont :

$$x = x_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\, t + x'_0 \sqrt{\frac{l}{g}} \sin\sqrt{\frac{g}{l}}\, t.$$

$$y = y_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\, t + y'_0 \sqrt{\frac{l}{g}} \sin\sqrt{\frac{g}{l}}\, t ;$$

le point x, y décrit une petite ellipse, avec la période $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

127 — **Système à trois paramètres** : q_1, q_2, q_3. — Soit U la fonction des forces, maximum et égale à zéro pour la position d'équilibre stable, correspondant à $q_1 = q_2 = q_3 = 0$; les formes réduites sont :

$$-2U_1 = \alpha q_1^2 + \beta q_2^2 + \gamma q_3^2 + 2\delta q_2 q_3 + 2\varepsilon q_3 q_1 + 2\zeta q_1 q_2 .$$
$$2T_1 = a q_1'^2 + b q_2'^2 + c q_3'^2 + 2d q_2' q_3' + 2e q_3' q_1' + 2f q_1' q_2' .$$

les formes quadratiques à coefficients constants des seconds membres étant positives.

On peut faire un changement de paramètres pour faire disparaître les termes rectangles, soit :

$$q_1 = \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \lambda_3 Q_3$$
$$q_2 = \mu_1 Q_1 + \mu_2 Q_2 + \mu_3 Q_3$$
$$q_3 = \nu_1 Q_1 + \nu_2 Q_2 + \nu_3 Q_3 ,$$

les λ, μ, ν étant des nombres réels tels que l'on ait :

$$-2U_1 = \alpha' Q_1^2 + \beta' Q_2^2 + \gamma' Q_3^2 .$$
$$2T_1 = a' Q_1'^2 + b' Q_2'^2 + c' Q_3'^2 .$$

En effet, faire ce changement de variables revient à chercher un triangle conjugué commun aux deux coniques imaginaires (fig. 170), d'équations

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + 2\delta yz + 2\varepsilon zx + 2\zeta xy = 0 .$$
$$a x^2 + b y^2 + c z^2 + 2d yz + 2e zx + 2f xy = 0 ;$$

un tel triangle a pour sommets les points d'intersection des sécantes communes aux deux coniques, et ces points P, M, N sont réels comme intersections de droites réelles ou de droites imaginaires conjuguées, car les points de rencontre

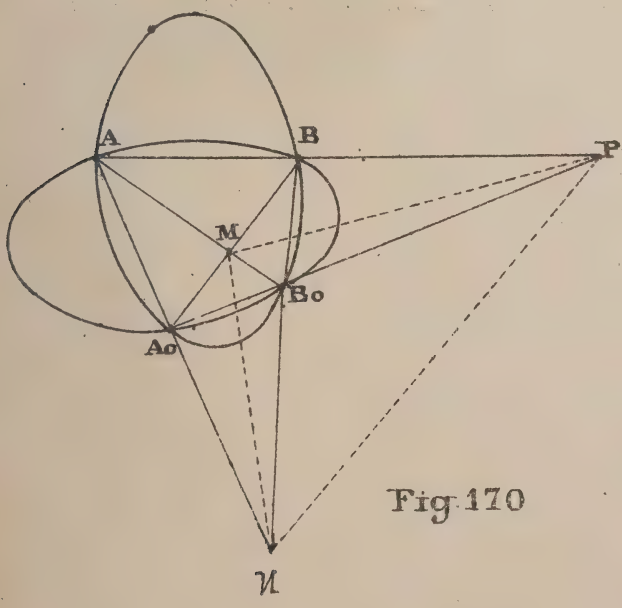

Fig. 170

des deux coniques sont deux à deux conjugués (par exemple, A_0 est conjugué de A, et B_0 est conjugué de B); les nombres λ, μ, ν sont donc réels.

Cherchons les équations de Lagrange relatives aux formes réduites précédentes; on a:

$$\frac{\partial T_1}{\partial Q'_1} = a' Q'_1, \qquad \frac{\partial T_1}{\partial Q'_2} = b' Q'_2 \qquad \frac{\partial T_1}{\partial Q'_3} = c' Q'_3,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial Q_1} = -\alpha' Q_1, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial Q_2} = -\beta' Q_2 \qquad \frac{\partial u_1}{\partial Q_3} = -\gamma' Q_3;$$

d'où, les équations de Lagrange,

$$a' Q''_1 + \alpha' Q_1 = 0 \qquad \text{posons:} \qquad r_1^2 = \frac{\alpha'}{a'},$$
$$b' Q''_2 + \beta' Q_2 = 0 \qquad\qquad r_2^2 = \frac{\beta'}{b'}$$
$$c' Q''_3 + \gamma' Q_3 = 0 \qquad\qquad r_3^2 = \frac{\gamma}{c'}$$

on obtient les solutions

$$Q_1 = C_1 \cos(r_1 t + \varphi_1),$$
$$Q_2 = C_2 \cos(r_2 t + \varphi_2),$$
$$Q_3 = C_3 \cos(r_3 t + \varphi_3);$$

d'où la solution générale

$$q_1 = C_1 \lambda_1 \cos(r_1 t + \varphi_1) + C_2 \lambda_2 \cos(r_2 t + \varphi_2) + C_3 \lambda_3 \cos(r_3 t + \varphi_3),$$
$$q_2 = C_1 \mu_1 \cos(r_1 t + \varphi_1) + C_2 \mu_2 \cos(r_2 t + \varphi_2) + C_3 \mu_3 \cos(r_3 t + \varphi_3),$$
$$q_3 = C_1 \nu_1 \cos(r_1 t + \varphi_1) + C_2 \nu_2 \cos(r_2 t + \varphi_2) + C_3 \nu_3 \cos(r_3 t + \varphi_3).$$

Les équations différentielles en q_1, q_2, q_3 admettent donc trois solutions particulières de la forme

$$\lambda \cos(rt + \varphi), \quad \mu \cos(rt + \varphi), \quad \nu \cos(rt + \varphi)$$

Cela explique et justifie la méthode employée précédemment dans l'étude du cas de deux paramètres. On voit que cette méthode est générale.

Chapitre V

Forme générale des équations de la Mécanique.

128 — Équations d'Hamilton. — La transformation d'Hamilton permet de passer des équations de Lagrange à des équations de forme générale et symétrique.

Supposons toujours les liaisons sans frottement ; soient $q_1, q_2, \ldots, q_K$ les paramètres ; les équations de Lagrange sont

$$(1)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha , \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k) ;$$

elles forment un système de K équations différentielles du second ordre à K fonctions inconnues $q_1, q_2, \ldots, q_K$.

Si l'on prend comme inconnues les 2K fonctions q_α et q'_α, on obtiendra un système de 2K équations différentielles du premier ordre formé par les K équations (1) et les K équations

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = q'_\alpha .$$

Posons $p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}$, et prenons comme inconnues les 2K fonctions $q_1, q_2, \ldots, q_K, p_1, p_2, \ldots, p_K$.

La force vive 2T est un polynôme du second degré par rapport aux q'_α ; on a ainsi

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial q'_1} = a'_1\, q'_1 + a'^2_1 q'_2 + \ldots\ldots + a'^{\kappa}_1 q'_\kappa + b_1 ,$$

$$p_2 = \frac{\partial T}{\partial q'_2} = a'_2\, q'_1 + a'^2_2 q'_2 + \ldots\ldots + a'^{\kappa}_2 q'_\kappa + b_2 ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

$$p_\kappa = \frac{\partial T}{\partial q'_\kappa} = a'_\kappa\, q'_1 + a'^2_\kappa q'_2 + \ldots\ldots + a'^{\kappa}_\kappa q'_\kappa + b_\kappa ,$$

avec $$a'^{j}_{i} = a'^{i}_{j}$$

Le changement de variables est possible car on peut résoudre les équations précédentes par rapport aux q'_α en fonction des p_α.

Montrons-le, pour simplifier dans le cas où les liaisons ne dépendent pas du temps. On peut prendre $b_\alpha = 0$. Il faut et il suffit que le déterminant Δ des coefficients a'^{j}_{i} ne soit pas nul. Or, si le déterminant Δ s'annulait pour certaines valeurs $q'^{\circ}_1, q'^{\circ}_2, \ldots, q'^{\circ}_\kappa$ des paramètres, on pourrait, pour ces valeurs, trouver des nombres q'°_1, $q'^{\circ}_2, \ldots, q'^{\circ}_\kappa$, non tous nuls et vérifiant les équations

$$a'^{1}_{1}\, q'_1 + a'^{2}_{1} q'_2 + \ldots + a'^{\kappa}_{1} q'_\kappa = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$a'^{1}_{\kappa}\, q'_1 + a'^{2}_{\kappa} q'_2 + \ldots + a'^{\kappa}_{\kappa} q'_\kappa = 0.$$

Or, $2T$ étant maintenant une forme quadratique en q'_α, on a :

$$\sum{}' q'_\alpha \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} = 2T$$

et pour le système des valeurs $q'^{\circ}_1, q'^{\circ}_2, \ldots, q'^{\circ}_\kappa$ et des valeurs $q'^{\circ}_1, q'^{\circ}_2, \ldots\ldots, q'^{\circ}_\kappa$, ces dernières n'étant pas toutes nulles, on aurait $T_0 = 0$, ce qui est impossible, car la force vive $\Sigma m v^2$ ne peut être nulle quand les vitesses de certains points ne sont pas nulles. Nous démontrons ainsi non seulement que le déterminant Δ n'est pas identiquement nul, mais encore qu'il ne peut jamais s'annuler.

Nous pouvons donc, au lieu des variables $q_1, q_2, \ldots, q_k$, $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$, prendre les variables $q_1, q_2, \ldots, q_k, p_1, p_2, \ldots, p_k$.

Les équations de Lagrange peuvent s'écrire

$$\frac{dp_\alpha}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k)$$

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = q'_\alpha$$

La force vive $2T$ est fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_k$, $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$ et de $\underline{t}$; donnons à t une valeur constante et calculons la différentielle de T par rapport aux autres variables

$$\delta T = \sum \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \sum \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} \delta q'_\alpha ,$$

ou

$$\delta T = \sum \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \sum p_\alpha \delta q'_\alpha$$

d'autre part

$$\delta \sum p_\alpha q'_\alpha = \sum p_\alpha \delta q'_\alpha + \sum q'_\alpha \delta p_\alpha$$

Retranchons membre à membre les deux égalités précédentes, il vient

$$\delta\left(\sum p_\alpha q'_\alpha - T\right) = \sum q'_\alpha \delta p_\alpha - \sum \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha .$$

Introduisons la nouvelle fonction

$$K = \sum p_\alpha q'_\alpha - T.$$

K est un polynome du second degré par rapport aux q'_α ; si on y remplace les q'_α par leurs expressions en fonction des p_α, K devient un polynome en $q_1, q_2, \ldots, q_k$, $p_1, p_2, \ldots, p_k$, et l'on a

$$\delta K = -\sum \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \sum q'_\alpha \delta p_\alpha$$

Or

$$\delta K = \sum \frac{\partial K}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \sum \frac{\partial K}{\partial p_\alpha} \delta p_\alpha .$$

On a ainsi deux expressions de la différentielle δK ; égalons les coefficients de δp_α et δq_α, il vient

$$q'_\alpha = \frac{\partial K}{\partial p_\alpha}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial K}{\partial q_\alpha}$$

et les équations de Lagrange s'écrivent

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial q_\alpha} + Q_\alpha$$

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial K}{\partial p_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k)$$

Supposons que Q_α soit la dérivée par rapport à q_α d'une fonction $U(q_1, q_2, \ldots, q_\alpha, \ldots, q_k, t)$ et posons :

$$H = K - U,$$

H s'appelle la fonction d'Hamilton. On a :

$$\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \frac{\partial K}{\partial p_\alpha}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial K}{\partial q_\alpha} - Q_\alpha$$

Les équations précédentes s'écrivent

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$$

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k)$$

ce sont les <u>équations d'Hamilton</u>, de forme très symétrique.

<u>Remarque</u>. — Quand les forces dépendent d'une fonction de force, et les liaisons ne dépendent pas du temps, on peut appliquer le théorème des forces vives :

$$T = U + h.$$

La fonction T est ici homogène et du second degré en $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$, on a donc

$$\Sigma' p_\alpha q'_\alpha = \Sigma' q'_\alpha \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} = 2T ;$$

$$K = 2T - T = T,$$

et la fonction d'Hamilton est

$$H = T - U.$$

D'après le théorème des forces vives, on doit avoir

$$H = h ;$$

par conséquent, les équations d'Hamilton doivent entraîner

$$\frac{dH}{dt} = 0.$$

En effet, H ne dépendant du temps que par l'intermédiaire des variables $p_1 p_2 \dots p_K ; q_1 q_2 \dots q_K$, on a :

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=K}{}' \left(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \frac{dq_\alpha}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \frac{dp_\alpha}{dt} \right),$$

c'est-à-dire

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=K}{}' \left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \right) = 0$$

On retrouve donc bien l'intégrale première des forces vives.

Chapitre VI

Chocs et Percussions.

129 — **Impulsion.** — Soit M un point matériel de masse m, en mouvement sous l'action de forces dont la résultante est X, Y, Z.

Les équations du mouvement sont

$$(1) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

Supposons que dans les fonctions X, Y, Z, les variables x, y, z, x', y', z' aient été remplacées par les fonctions du temps

$$x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t);\ x' = f'(t),\ y' = g'(t),\ z' = h'(t)$$

qui définissent la trajectoire du mobile ; X, Y, Z deviennent des fonctions de t. Intégrons dans l'intervalle $t_0\ t_1$, les deux membres des équations du mouvement, nous aurons

$$(2) \qquad mx'_1 - mx'_0 = \int_{t_0}^{t_1} X\,dt,\ my'_1 - my'_0 = \int_{t_0}^{t_1} Y\,dt,\ mz'_1 - mz'_0 = \int_{t_0}^{t_1} Z\,dt,$$

x'_0, y'_0, z'_0 étant les composantes de la vitesse $\vec{V}_0$ au temps t_0 ; x'_1, y'_1, z'_1 les composantes de la vitesse $\vec{V}_1$ au temps t_1. Posons :

$$\mathcal{X} = \int_{t_0}^{t_1} X\,dt, \quad \mathcal{Y} = \int_{t_0}^{t_1} Y\,dt, \quad \mathcal{Z} = \int_{t_0}^{t_1} Z\,dt;$$

le vecteur $\vec{I}$, de composantes X, Y, Z s'appelle le vecteur impulsion, ou plus brièvement l'impulsion, relative à la force $\vec{F}$, de composantes X, Y, Z, pendant l'intervalle de temps $t_0\ t_1$. Si la force $\vec{F}$ est la somme de deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$, l'impulsion $\vec{I}$ de cette force est la somme des impulsions $\vec{I}_1$ et $\vec{I}_2$ relatives à $\vec{F}_1$ et à $\vec{F}_2$. Les égalités (2) expriment que le vecteur impulsion est la différence des vecteurs quantités de mouvement du point M pris à la fin et au début de l'intervalle de temps considéré (fig. 171).

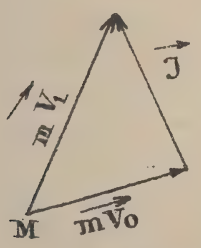

Fig. 171

Si t_0 restant fixe, l'intervalle $t_1 - t_0$ tend vers zéro, le vecteur $\vec{I}$ a aussi pour limite zéro, puisque la quantité de mouvement au temps t_1 a pour limite la quantité de mouvement au temps t_0. D'ailleurs, si l'on désigne par H un nombre supérieur à la grandeur F' de la force $\vec{F}$ dans l'intervalle $t_0 - h$, $t_0 + h$, les composantes de l'impulsion sont inférieures à $H|t_1 - t_0|$ et tendent vers zéro avec $t_1 - t_0$.

130 — Choc - Percussion. — Il peut arriver que la vitesse d'un point mobile M varie brusquement en grandeur et en direction. La trajectoire présente alors un point anguleux, chacune des branches de cette trajectoire étant tangente à l'un des vecteurs vitesses au point considéré. Ce fait se produit quand deux corps en mouvement se rencontrent. On appelle choc, la rencontre de deux corps en mouvement. Pendant le choc, la vitesse d'un point M du corps varie brusquement. Appelons t_0 et t_1 les époques du début et de la fin du choc, l'intervalle de temps $t_1 - t_0$ est de l'ordre du centième, du millième et parfois du dix-millième de seconde. La position de M

a varié pendant ce temps, mais la vitesse restant finie, le déplacement est très faible et nous le négligerons. En d'autres termes, M est considéré comme immobile dans l'intervalle de temps t_0 t_1 ; la vitesse varie du vecteur $\vec{V_0}$ au vecteur $\vec{V_1}$. Si la force $\vec{F}$ qui agit sur M ne devenait pas considérable, l'impulsion serait faible, et il en serait de même pour la variation du vecteur quantité de mouvement. Puisque cette variation est finie pendant un temps très court, il faut que F prenne pendant ce temps, des valeurs très grandes, c'est-à-dire qu'il en soit ainsi pour l'intensité de l'une au moins des forces dont $\vec{F}$ est la somme. On dit qu'il se produit, pendant le choc, des <u>forces instantanées</u>, considérables et on appelle <u>percussion</u> le vecteur $\vec{P}$ de composantes :

$$\mathcal{X} = \int_{t_0}^{t_1} X\,dt\,, \qquad \mathcal{Y} = \int_{t_0}^{t_1} Y\,dt\,, \qquad \mathcal{Z} = \int_{t_0}^{t_1} Z\,dt.$$

On voit que si $\vec{F}$ est la somme de deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$, la percussion $\vec{P}$ est égale à la somme des percussions correspondantes $\vec{P_1}$ et $\vec{P_2}$. Si l'une des forces $\vec{F_1}$, par exemple, garde une valeur finie quand $t_1 - t_0$ est infiniment petit, l'impulsion correspondante sera infiniment petite ; elle ne donnera pas lieu à une percussion et on la supprimera dans le calcul. Par exemple, le poids du point M n'intervient pas. Si, dans l'intervalle $t_0 t_1$, la force $\vec{F}$ a une direction constante, de coefficients directeurs α, β, γ la percussion $\vec{P}$ a la même direction ; car si

$$X = \alpha F \quad , \qquad Y = \beta F \quad , \qquad Z = \gamma F,$$

on a

$$\mathcal{X} = \alpha \int_{t_0}^{t_1} F'dt\,, \quad \mathcal{Y} = \beta \int_{t_0}^{t_1} F'dt\,, \quad \mathcal{Z} = \gamma \int_{t_0}^{t_1} F dt$$

ou, en posant $\qquad \mathcal{F} = \int_{t_0}^{t_1} F dt,$

$$X = \alpha F, \quad Y = \beta F, \quad Z = \gamma F.$$

Si deux forces sont directement opposées, il en est de même pour leurs percussions.

Remarquons que $\vec{P}$ est l'impulsion pendant le temps $t_0\, t_1$: on a donc en utilisant les formules (2) du paragraphe précédent

$$X + mx'_0 - mx'_1 = 0, \quad Y + my'_0 - my'_1 = 0, \quad Z + mz'_0 - mz'_1 = 0,$$

ou

$$\vec{P} + m\vec{V}_0 - m\vec{V}_1 = 0; \tag{3}$$

en d'autres termes, les vecteurs $m\vec{V}_0$, $-m\vec{V}_1$, et $\vec{P}$ sont en équilibre, si on les considère comme représentant les forces appliquées au point matériel M.

Le vecteur $m(\vec{V}_1 - \vec{V}_0)$ s'appelle la variation de la quantité de mouvement. Le vecteur opposé $m(\vec{V}_0 - \vec{V}_1)$ s'appelle la quantité de mouvement perdue.

131 — Choc pour un système matériel. — Considérons un système matériel dans lequel se produit un choc. L'équation (3) est applicable à chacun des points du système à condition de désigner par $\vec{F}$ la somme de toutes les forces intérieures et extérieures appliquées en ce point. Il y a donc équilibre entre les vecteurs $m\vec{V}_0$, les vecteurs $-m\vec{V}_1$, et les vecteurs $\vec{P}$. En raisonnant comme on l'a fait dans l'étude de l'équilibre d'un système matériel quelconque, on voit que les percussions relatives aux forces intérieures sont deux à deux directement opposées et disparaissent. D'autre part, les termes relatifs aux forces extérieures finies, comme la pesanteur sont supprimés. Il ne reste plus que les percussions extérieures. Donc, il y a équilibre entre les vecteurs $m\vec{V}_0$, les vecteurs $-m\vec{V}_1$, et les percussions extérieures ou encore : le système des vecteurs $m(\vec{V}_1 - \vec{V}_0)$, variations des quantités de mouvement, est équivalent au système des percussions extérieures.

Dans l'évaluation des percussions extérieures, il faut compter les percussions dues aux forces de liaison: par exemple, si un corps solide tourne autour d'un axe, on introduira les deux percussions relatives aux deux points de l'axe que l'on a fixés.

Les percussions des forces de liaison intérieures donneront une somme nulle parce que si deux corps du système se touchent en un point A, les actions mutuelles des corps en ce point sont deux vecteurs opposés et il en est de même pour les percussions correspondantes.

Les deux systèmes des vecteurs $\overrightarrow{m(V_1 - V_0)}$ et des percussions extérieures étant équivalents, leurs résultantes générales sont égales, donc dans un choc,

Théorème.- La variation de la somme des quantités de mouvement est égale à la somme des percussions extérieures.

On peut énoncer ce résultat autrement.

Nous avons vu que la quantité de mouvement du centre de gravité du système, en supposant que la masse totale du système soit concentrée en ce point, est égale à la somme des quantités de mouvement des points du système. Cette quantité de mouvement au temps t, est la résultante générale des vecteurs $\overrightarrow{mV_1}$ et au temps t_0, elle est la résultante générale des vecteurs $\overrightarrow{mV_0}$. La variation de cette quantité de mouvement est la résultante générale des vecteurs $\overrightarrow{m(V_1 - V_0)}$; on peut donc énoncer aussi sous la forme suivante le théorème précédent.

Théorème.- La variation de la vitesse du centre de gravité pendant un choc est la même que si l'on suppose toute la masse du système concentrée en ce point et les percussions extérieures remplacées par des vecteurs égaux appliqués en ce point.

Prenons la somme des moments des quantités de mouvement $\overrightarrow{mV}$, par rapport à un point O, puis la

somme des moments des vecteurs $-\overrightarrow{mV_0}$ par rapport au même point. La somme des deux vecteurs obtenus représente la variation de la somme des moments des quantités de mouvement pendant le choc. C'est le moment résultant par rapport au point O, du système de vecteurs $\overrightarrow{m(V_1 - V_0)}$. Ce moment est égal au moment des percussions extérieures. Donc :

Théorème. — La variation, pendant un choc, de la somme des moments des quantités de mouvement des points d'un système est égale à la somme des moments des percussions extérieures.

Menons, par le point O, un axe quelconque (Δ) ; le moment par rapport à (Δ) d'un système de vecteurs est le nombre qui mesure, sur (Δ), la projection du moment résultant du système par rapport au point O. Comme les moments résultants en O, des systèmes formés par les vecteurs $m(V_1 - V_0)$ et par les percussions extérieures sont identiques, il en est de même de leurs projections sur (Δ), et, par suite, le théorème précédent est applicable si les moments sont pris par rapport à un axe.

132 — Exemples. — I — On considère (fig. 172) un disque tournant dans un plan horizontal autour de son centre de gravité G avec une vitesse angulaire donnée ω_0. On fixe brusquement un point O du bord du disque, de façon qu'il puisse tourner autour de O. Calculer la nouvelle vitesse angulaire ω_1.

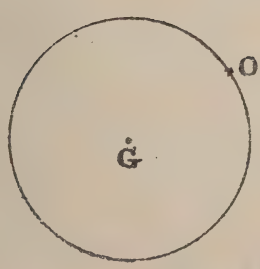

Fig. 172

La seule force donnant lieu à percussion est la réaction du point O. Comme le moment de cette force, par rapport à la droite perpendiculaire en O au

plan du disque, est nul, la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à cet axe est la même avant et après le choc. Soit I le moment d'inertie du disque par rapport à son centre de gravité, et I_o le moment d'inertie par rapport au point O, on a

$$I_o \omega_1 = I \omega_o ,$$

Soit $I = Mk^2$

M désignant la masse du disque et k le rayon de giration par rapport à son centre de gravité G; on a

$$I_o = I + Md^2 = M(k^2 + d^2),$$

en appelant d la distance OG, et

$$\frac{\omega_1}{\omega_o} = \frac{k^2}{k^2 + d^2}$$

Pour un cercle $k^2 = \frac{d^2}{2}$, $\frac{\omega_1}{\omega_o} = \frac{1}{3}$; pour une circonférence, un cerceau $k^2 = d^2$ $\frac{\omega_1}{\omega_o} = \frac{1}{2}$.

133 — <u>Percussions appliquées à un solide mobile autour d'un axe fixe</u>. — Supposons que la fixité de l'axe ait été obtenue en fixant deux points O et O' du solide. Ce solide étant en mouvement, on lui applique, à l'instant t_o, des percussions formant un système de vecteurs de coordonnées $X\ Y\ Z\ L\ M\ N$, par rapport à des axes d'origine O Oz étant dirigé suivant OO' (fig. 173). Le corps qui était animé avant le choc de la vitesse angulaire ω_o prend, après le choc la vitesse angulaire ω_1 ; que nous nous proposons de déterminer. Au moment du choc, les réactions des deux points O et O' donnent des percussions inconnues

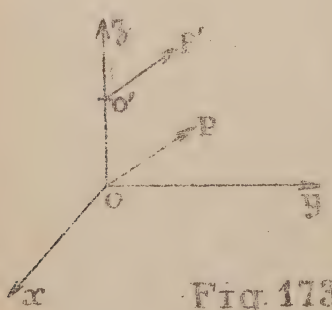

Fig. 173

$\vec{\mathcal{P}}$ et $\vec{\mathcal{P}}'$, dont les coordonnées seront respectivement
α, β, γ , $0,0,0$; α', β', γ', $-h'\beta'$, $h\alpha', 0$;
h désignant la cote OO' du point O'.

Appelons I le moment d'inertie du corps par rapport à Oz, la somme des moments des quantités de mouvement des points du corps par rapport à Oz est $I\omega$. Nous avons donc en appliquant le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à Oz et en posant $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_0$,

$$I\,\Delta\omega = \mathcal{M} \quad , \quad \Delta\omega = \frac{\mathcal{M}}{I} \qquad (1)$$

les percussions $\vec{\mathcal{P}}$ et $\vec{\mathcal{P}}'$ ne figurant pas dans ces formules puisque leurs moments sont nuls.

Proposons-nous de calculer les percussions $\vec{\mathcal{P}}$ et $\vec{\mathcal{P}}'$. Nous écrirons les cinq autres équations d'équilibre entre les vecteurs variation des quantités de mouvement et les vecteurs percussions.

Les coordonnées du vecteur quantité de mouvement du point M sont

$-m\omega y$, $m\omega x$, 0 ; $-m\omega xz$, $-m\omega yz$, $m\omega x^2$,

les cinq équations sont donc

$$\begin{aligned}
-\Delta\omega\ \Sigma my &= \mathcal{X} + \alpha + \alpha', \\
\Delta\omega\ \Sigma mx &= \mathcal{Y} + \beta + \beta', \\
0 &= \mathcal{Z} + \gamma + \gamma', \\
-\Delta\omega\ \Sigma mxz &= \mathcal{L} - h\beta', \\
-\Delta\omega\ \Sigma myz &= \mathcal{M} + h\alpha'.
\end{aligned}$$

$\Delta\omega$ étant déterminé par la relation (1), ces relations permettent de calculer $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ et seulement la somme $\gamma + \gamma'$.

134 — <u>Calcul des percussions de réactions</u>. — Proposons-nous de déterminer le système des percussions extérieures de manière que les percussions de liaisons $\vec{\mathcal{P}}$ et $\vec{\mathcal{P}}'$ soient nulles. Supposons pour simplifier

que les percussions extérieures se réduisent à une percussion unique, c'est-à-dire que

$$\mathcal{L}X + \mathcal{M}Y + \mathcal{N}Z = 0 .$$

Si nous supposons que l'on a fixé un point O du corps à l'axe de rotation assujetti à avoir une direction fixe par l'intermédiaire d'un collier O', la percussion $\vec{\mathcal{P}}$ est alors perpendiculaire à Oz $\gamma' = 0$ et, par suite si $\gamma = 0$, $Z = 0$. La percussion doit être perpendiculaire à l'axe de rotation.

Prenons le plan xOz passant par $G(\xi, 0\zeta)$ (fig. 174), si $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0$, on a

$$X = -\Delta\omega M\eta = 0$$
$$-\mathcal{P} = Y = \Delta\omega M\xi .$$

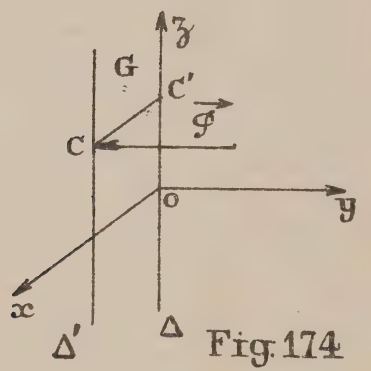

Fig. 174

Le vecteur percussion doit être perpendiculaire au plan Goz. Soient $0, -\mathcal{P}, 0$, les composantes de $\vec{\mathcal{P}}$ et $\xi', 0, \zeta'$ les coordonnées du point C où sa ligne d'action rencontre le plan xOz on a

$$\mathcal{L} = \mathcal{P}\zeta', \quad \mathcal{M} = 0, \quad \mathcal{N} = -\mathcal{P}\xi'.$$

donc

$$\Delta\omega M\xi = -\mathcal{P},$$
$$\Delta\omega \Sigma mxz = -\mathcal{P}\zeta',$$
$$\Delta\omega \Sigma myz = 0$$
$$MK^2\Delta\omega = -\mathcal{P}\xi',$$

en posant $I = MK^2$.

Donc, $\Sigma myz = 0$ et $\Sigma mxz = -\zeta' \frac{\mathcal{P}}{\Delta\omega} = \zeta' M\xi =$
$= \Sigma mx\zeta'$ ou $\Sigma mx(z - \zeta') = 0$;
c'est-à-dire que l'axe de rotation doit être un axe principal d'inertie par rapport à la projection C' de C sur Oz.

En égalant les valeurs de $\frac{M\Delta\omega}{\mathcal{P}}$ tirées de la première et de la dernière équation, il vient

$$\xi\xi' = K^2$$

Si nous menons par C l'axe Δ' parallèle à Δ ou Oz, ces deux axes Δ' et Δ peuvent être considérés comme les axes d'oscillation et de suspension du pendule formé par le corps solide.

On vérifie que réciproquement ces conditions sont suffisantes.

En résumé :

Pour que les percussions de réactions soient nulles, il faut et il suffit que la percussion extérieure soit perpendiculaire au plan déterminé par l'axe Δ et le centre de gravité, que cet axe Δ soit un axe principal d'inertie pour le point C' projection sur Δ de la percussion, que la ligne d'action de la percussion rencontre en un point C l'axe d'oscillation Δ' du solide suspendu à l'axe Δ.

Le point C s'appelle le <u>centre de percussion</u> relatif à l'axe Oz.

II. <u>Exemple d'une plaque</u>. — Considérons le cas d'une plaque infiniment mince assujetti à tourner autour d'une droite Δ de son plan. L'axe L est toujours axe principal d'inertie pour un de ses points. En effet, en prenant le plan de la plaque comme plan des xz, $y = 0$ pour tout point de la plaque et l'expression Σmyz est nulle. Si l'axe des z n'est pas axe principal d'inertie pour le point O, Σmzx est différent de zéro ; on peut alors déterminer un point O situé sur Oz et de cote ζ' tel que l'axe Oz soit axe principal d'inertie pour ce point. Il suffit de résoudre l'équation

$$\Sigma m x (z - \zeta') = 0$$

ce qui donne

$$\zeta' = \frac{\Sigma mxz}{\Sigma mx}$$

Si $\Sigma mx = M\xi \neq 0$, il existe donc toujours sur

oz un point C' et un seul tel que oz soit axe principal d'inertie pour ce point. Ceci étant, pour qu'une percussion P ne donne aucune percussion de liaison, il faut qu'elle soit perpendiculaire au plan de la plaque en un point C de $C'x'$ parallèle à ox (fig. 175) tel que

$$c'C = \xi' = \frac{k^2}{\xi} = \frac{\Sigma m x^2}{\Sigma m x}$$

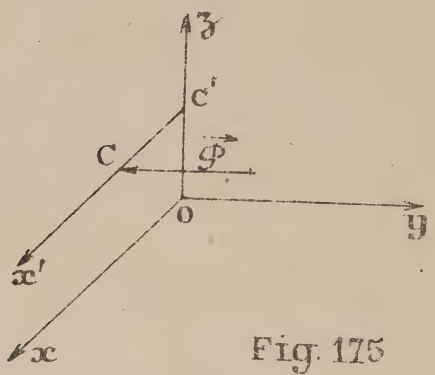

Fig. 175

Ce point C est le centre de percussion de la plaque par rapport à l'axe oz.

Si l'on pose $m' = mx$, les coordonnées du point C sont

$$\xi' = \frac{\Sigma m' x}{\Sigma m'} \quad , \quad \zeta' = \frac{\Sigma m' z}{\Sigma m'} .$$

Le centre de percussion de la plaque relatif à un axe oz coïncide donc avec la position qu'occuperait le centre de gravité, si la masse de chaque élément était multipliée par sa distance à l'axe. Nous retrouverons le point C en hydrostatique. Si $\xi = 0$, l'axe oz passe par G, le problème est impossible ou indéterminé suivant que Gz est principal ou non.

III. 135 — <u>Pendule balistique (fig. 176)</u>. — Cet appareil était jadis destiné à mesurer la vitesse des projectiles. Il est constitué par un cylindre contenant du sable, réuni par des tiges à un axe horizontal O autour duquel il peut tourner. Le projectile, lancé horizontalement pénètre dans le cylindre et s'y fixe en un point H que nous supposerons dans le plan passant par l'axe et le

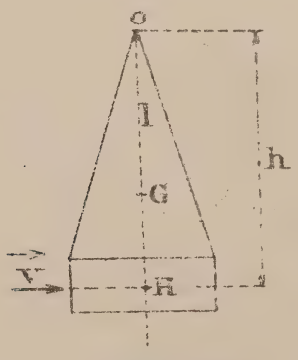

Fig. 176

centre de gravité G. Par suite du choc, le cylindre se déplace et oscille et ce pendule composé accuse un écart angulaire maximum α. C'est de cet angle α que l'on déduit la vitesse V du projectile. Soit M la masse du pendule, m celle du projectile, h la distance de l'axe de suspension à la vitesse $\vec{V}$ du projectile, l la distance du centre de gravité G à l'axe de suspension, MK^2 le moment d'inertie du pendule par rapport à cet axe.

Puisque les percussions extérieures au système sont celles qui proviennent des réactions de l'axe, leur moment par rapport à cet axe est nul et par suite le moment de la quantité de mouvement du système total par rapport à cet axe n'a pas varié pendant le choc.

Avant le choc, seul le projectile était en mouvement, le moment de la quantité de mouvement du système avant le choc est donc mhV.

Si ω est la vitesse angulaire du système après le choc, le moment cinétique par rapport à l'axe de suspension est

$$M.K^2\omega + mh^2\omega.$$

On a donc

$$mhV = (MK^2 + mh^2)\omega, \quad V = \frac{(MK^2 + mh^2)}{mh}\omega.$$

Le théorème de la force vive nous fournit maintenant la relation entre l'angle α et la vitesse ω. Quand on passe de la position verticale à l'écart maximum α, la force vive est d'abord $(MK^2 + mh^2)\omega^2$ puis zéro ; le travail du poids du pendule ayant pour expression

$$-2g(Ml + mh)(1 - \cos\alpha),$$

le théorème des forces vives donne

$$(MK^2 + mh^2)\omega^2 = 2g(Ml + mh)(1 - \cos\alpha),$$

$$\omega = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{g(Ml + mh)}{(MK^2 + mh^2)}} \quad ;$$

et, par suite,

$$V = \frac{2}{mh}\sqrt{g(Ml+mh)(MK^2+mh^2)}\sin\frac{\alpha}{2}$$

Plaçons l'axe du cylindre à une distance h de l'axe O telle que les percussions de liaison soient nulles. Ce plan vertical dans lequel se meut le centre de gravité étant un plan de symétrie de l'appareil, l'axe de suspension est un axe principal d'inertie pour le point O, il suffit donc, pour que les percussions de liaison soient nulles, que :

$$OG.OH = K^2$$

c'est-à-dire

$$K^2 = lh.$$

L'expression de V se simplifie et devient

$$V = \frac{2(Ml+mh)}{m}\sqrt{\frac{g}{h}}\sin\frac{\alpha}{2}$$

136 — Travail des percussions. — Pendant la durée du choc, on peut appliquer les principes de la Mécanique, et, en particulier, celui de D'Alembert. Si on considère un déplacement virtuel $\delta x, \delta y, \delta z$ compatible avec les liaisons à l'instant t, la somme des travaux des forces d'inertie et des forces X, Y, Z directement appliquées au corps est nulle, c'est-à-dire que

$$-\Sigma m(x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z) + \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0.$$

Dans la théorie des chocs, on néglige le déplacement pendant le choc. On peut donc supposer $\delta x, \delta y, \delta z$ constants pendant la durée $t_1 - t_0$ du choc et intégrer entre t_0 et t_1, on a alors

$$\Sigma - \int_{t_0}^{t_1} m(x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z)\,dt + \Sigma\int_{t_0}^{t_1}(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,dt = 0$$

or, $\int_{t_0}^{t_1} mx''dt = mx'_1 - mx'_0 = \Delta mx'$, $\int_{t_0}^{t_1} my''dt = \Delta my'$, $\int_{t_0}^{t_1} mz''dt = \Delta mz'$;

$$\int_{t_0}^{t_1} X\,dt = \mathcal{X}\,, \quad \int_{t_0}^{t_1} Y\,dt = \mathcal{Y}\,, \quad \int_{t_0}^{t_1} Z\,dt = \mathcal{Z}\,,$$

X, Y, Z étant les composantes des percussions directement appliquées. L'équation précédente devient

$$\Sigma - m(\Delta x'\delta x + \Delta y'\delta y + \Delta z'\delta z) + \Sigma'(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0\,.$$

D'autre part on peut regarder chaque point du système comme libre à condition de lui appliquer les percussions provenant des forces de liaison. Donc, si on imprime aux différents points des déplacements virtuels compatibles avec les liaisons qui existent pendant le choc, la somme des travaux $\mathcal{T}_Q$ des quantités de mouvement perdues, des travaux $\mathcal{T}_P$ des percussions directement appliquées et des travaux $\mathcal{T}_{P'}$ des percussions de liaison est nulle :

$$\mathcal{T}_Q + \mathcal{T}_P + \mathcal{T}_{P'} = 0$$

Or comme on vient de trouver

$$\mathcal{T}_Q + \mathcal{T}_P = 0\,,$$

il en résulte que $\mathcal{T}_{P'} = 0$.

Donc, pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons bilatérales et sans frottement qui ont lieu pendant le choc, la somme des travaux des percussions de liaisons est nulle.

137 — Théorème de Carnot. — Considérons un système en mouvement soumis à des liaisons sans frottement. Il se produit alors un choc. Les seules percussions agissant sur le système sont les percussions provenant des liaisons antérieures ou brusquement établies.

Le théorème de Carnot est alors le suivant :

Si toutes les liaisons subsistent après le choc, la force vive perdue est égale à la force vive que posséderait le système si chaque point était animé de la vitesse qu'il a perdue.

En effet, les liaisons persistant après le choc, le déplacement réel qui suit le choc est alors un

déplacement virtuel compatible avec les liaisons existant pendant le choc. Comme le travail $\mathcal{T}_p$ des percussions directement appliquées est nul, car ces percussions n'existent pas, la somme $\mathcal{T}_Q$ des travaux des quantités de mouvement perdues est nulle.

La quantité de mouvement perdue par un point de masse m est $\overrightarrow{m(V_0 - V_1)}$, donc la somme $\mathcal{T}_Q$ est

$$\mathcal{T}_Q = \sum \overrightarrow{m(V_0 - V_1)} . V_1 \, dt = 0$$

ou

$$\sum m \overrightarrow{V_0} . \overrightarrow{V_1} - \sum m V_1^2 = 0$$

Désignons par $\overrightarrow{W}$ la vitesse perdue :

$$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{V_0} - \overrightarrow{V_1} ;$$

on a

$$\overrightarrow{W}^2 = V_0^2 + V_1^2 - 2 \overrightarrow{V_0} . \overrightarrow{V_1} ,$$

et, par suite,

$$\sum m W^2 = \sum m V_0^2 + \sum m V_1^2 - 2 \sum m \overrightarrow{V_0} . \overrightarrow{V_1}$$

et, en tirant $\sum m \overrightarrow{V_0} . \overrightarrow{V_1}$ de la relation précédemment obtenue,

$$\sum m W^2 = \sum m V_0^2 - \sum m V_1^2 .$$

138 — <u>Exemples</u>. — I. — Reprenons la plaque tournant autour de son centre de gravité avec une vitesse angulaire ω_0 (fig. 177). A un instant donné on fixe un point O situé à la distance d du centre et on demande la vitesse angulaire ω_1 autour du point O.

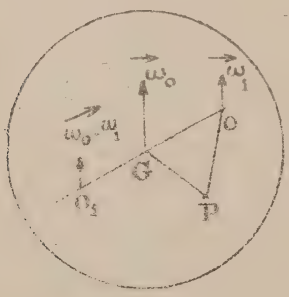

Fig. 177

Un point P du disque a, avant le choc, une vitesse égale au moment du vecteur $\overrightarrow{\omega_0}$ par rapport à P et, après le choc, une vitesse égale au moment du

vecteur $\overrightarrow{\omega_1}$ par rapport au même point. La vitesse perdue par le point est donc le moment par rapport à P du vecteur équivalent au système formé par les deux vecteurs $\overrightarrow{\omega_0}$ et $-\overrightarrow{\omega_1}$. Or, ce vecteur, a comme grandeur $\omega_0 - \omega_1$ et est appliqué en un point O, de OG tel que, en posant: $G O_1 = d_1$, $G O = d$, on ait

$$(1) \quad \frac{d_1}{\omega_1} = \frac{d + d_1}{\omega_0} = \frac{d}{\omega_0 - \omega_1}$$

Désignons par I, I' et I_1 les moments d'inertie polaire du disque par rapport aux points G, O et O_1; la force vive perdue est

$$I\omega_0^2 - I'\omega_1^2.$$

La force vive qu'aurait le système si chaque point avait la vitesse perdue étant

$$I_1(\omega_0 - \omega_1)^2,$$

le théorème de Carnot donne

$$I\omega_0^2 - I'\omega_1^2 = I_1(\omega_0 - \omega_1)^2.$$

Soit $I = Mk^2$, comme

$$I_1 = I + Md_1^2 = M(K^2 + d_1^2),$$
$$I' = I + Md^2 = M(K^2 + d^2),$$

on a

$$K^2\omega_0^2 - (K^2 + d^2)\omega_1^2 = (K^2 + d_1^2)(\omega_0 - \omega_1)^2,$$

ce qui donne après réductions et en tenant compte de la relation (1)

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{K^2}{K^2 + d^2}.$$

II - <u>Pendule balistique</u>. — Les percussions ne provenant que de liaisons brusquement introduites au moment du choc et persistant après le choc, le théorème de Carnot s'applique.

Avant le choc, le pendule est immobile; la force vive du système se compose uniquement de la force vive du projectile mV^2.

Après le choc, la vitesse angulaire du pendule étant ω, la force vive du projectile est $mh^2\omega^2$, celle du pendule $MK^2\omega^2$, la force vive totale est $(MK^2+mh^2)\omega^2$.

Calculons la force vive due aux vitesses perdues. La vitesse perdue par le projectile étant $V-\omega h$, la force vive due à la vitesse perdue est $m(V-\omega h)^2$. La force vive due aux vitesses perdues par les points du pendule étant $MK^2\omega^2$, la force vive totale due aux vitesses perdues par les points du système est $m(V-\omega h)^2+MK^2\omega^2$. Le théorème de Carnot fournit l'égalité

$$mV^2-(MK^2+mh^2)\omega^2 = m(V-\omega h)^2+MK^2\omega^2,$$

d'où

$$V=\frac{2\omega(MK^2+mh^2)}{mh}$$

III- Corps solide mobile autour d'un point fixe. — Considérons un corps solide mobile autour d'un point fixe O. A un instant donné, on immobilise un second point O' du corps de façon que le solide tourne autour de la droite OO' (fig. 178). On se propose, connaissant les composantes p_0, q_0, r_0 de la rotation $\vec{\omega_0}$ du solide autour du point O, de calculer la rotation $\vec{\omega_1}$ du solide autour de l'axe OO' après le choc. Comme les liaisons sont persistantes et que les percussions directement appliquées au corps sont nulles, le théorème de Carnot peut s'appliquer. Prenons comme axes liés au corps, les axes principaux d'inertie relatifs au point O. En désignant par p, q, r, les composantes de $\vec{\omega_1}$ suivant ces axes, la

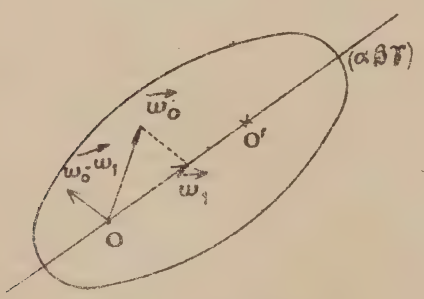

Fig. 178

force vive perdue est

$$Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2 - (Ap_1^2 + Bq_1^2 + Cr_1^2).$$

La vitesse $\overrightarrow{V_0}$ d'un point P du corps avant le choc est le moment de $\overrightarrow{\omega_0}$ par rapport à P, c'est-à-dire $\overrightarrow{V_0} = \overrightarrow{PO} \times \overrightarrow{\omega_0}$; sa vitesse V, après le choc est $\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{PO} \times \overrightarrow{\omega_1}$ et la vitesse perdue $\overrightarrow{V_0} - \overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{PO} \times (\overrightarrow{\omega_0} - \overrightarrow{\omega_1})$, c'est la vitesse qu'aurait ce point dans la rotation instantanée $\overrightarrow{\omega_0 - \omega_1}$ menée par O.

La force vive due aux vitesses perdues par les divers points du corps est donc

$$A(p_0 - p_1)^2 + B(q_0 - q_1)^2 + C(r_0 - r_1)^2,$$

le théorème de Carnot montre que

$$Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2 - (Ap_1^2 + Bq_1^2 + Cr_1^2) = A(p_0 - p_1)^2 + B(q_0 - q_1)^2 + C(r_0 - r_1)^2$$

d'où, après réductions

$$Ap_0p_1 + Bq_0q_1 + Cr_0r_1 = Ap_1^2 + Bq_1^2 + Cr_1^2.$$

Soient α, β, γ, les cosinus directeurs de la droite OO', on a

$$p_1 = \omega_1 . \alpha \quad , \quad q_1 = \omega_1 . \beta \quad , \quad r_1 = \omega_1 . \gamma,$$

et la relation précédente donne

$$\omega_1 = \frac{Ap_0\alpha + Bq_0\beta + Cr_0\gamma}{A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2}$$

Pour que les vitesses soient nulles à la fin du choc, il faut que

$$Ap_0\alpha + Bq_0\beta + Cr_0\gamma = 0,$$

c'est-à-dire que OO' soit perpendiculaire au moment cinétique relatif au point O. Comme ce moment cinétique est perpendiculaire au plan diamétral conjugué de la direction du vecteur $\overrightarrow{\omega_0}$ par rapport à l'ellipsoïde d'inertie du point O, il faut que la droite OO' soit située dans ce plan.

139 - <u>Détermination des variations de vitesses</u>. - Considérons un corps qui subit un choc dans -

l'intervalle de temps $t_0 t_1$. Avant l'instant t_0, le mouvement du corps était déterminé par les équations de la dynamique, les forces étant supposées connues. Après l'instant t_1, nous avons de nouveau les équations de la dynamique et le mouvement sera déterminé si nous connaissons les vitesses initiales $\overrightarrow{V_1}$ au temps t_1, puisque les positions sont les mêmes qu'au temps t_0. Le problème posé par le choc est donc le suivant : <u>étant données les vitesses au début du choc</u>, <u>trouver les vitesses à la fin de ce choc</u>.

Nous avons pu résoudre ce problème dans les exemples précédents parce que les corps qui se sont choqués sont devenus solidaires. Dans le cas du pendule balistique par exemple, nous n'aurions pas pu résoudre le problème si le projectile avait rebondi en abandonnant le pendule après le choc. La vitesse $\overrightarrow{V_1}$ du projectile après le choc serait, dans ce cas, une nouvelle inconnue dont la valeur dépend de l'état physique des corps qui sont venus au contact et ne peut être déterminée que par des lois expérimentales. Considérons, par exemple, une petite balle, de masse m, qu'on laisse tomber d'une hauteur h sur un sol horizontal poli ; le vecteur $m\overrightarrow{V_0}$ est vertical et $V_0^2 = 2gh$. La percussion $\overrightarrow{P}$ est un vecteur vertical, comme la réaction du sol ; donc, $m\overrightarrow{V_1}$ est vertical. L'expérience seule permettra de déterminer V_1. Supposons que la balle remonte à une hauteur h_1, on aura $V_1^2 = 2gh_1$ et $\frac{V_1}{V_0} = \sqrt{\frac{h_1}{h}}$; comme $h_1 < h$, la vitesse a été réduite dans un rapport qui peut varier depuis zéro, pour $h_1 = 0$, jusqu'à un pour $h_1 = h$. La force vive de la balle a diminué pendant le choc, de

$$m(V_0^2 - V_1^2) = 2mg(h - h_1)$$

En fait, si nous considérons (fig. 179) deux corps (S) et (S') qui se heurtent en un point A, un point P sur la normale à (S) en A a une vitesse $\overrightarrow{V_0}$, de composante W_0 suivant la normale PA. Cette composante $\overrightarrow{W_0}$ qui est la même pour tous les points de la normale PA, d'après un

théorème de cinématique, est appelée la vitesse de pénétration.

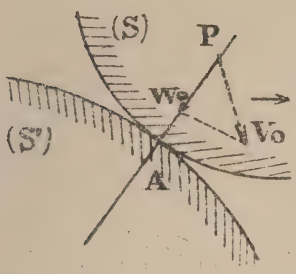

Fig. 179

Quand le choc se produit, les molécules de (S') sont comprimées, il se produit autour du point A une déformation qui absorbe une partie de la force vive du système. Si les corps sont peu élastiques ou mous, la déformation subsiste après le choc, les deux corps demeurent solidaires. Si W_1 est la composante normale de la vitesse du point au contact après le choc, elle sera nulle. Si les deux corps sont parfaitement élastiques, les déformations produites disparaissent à la fin du choc, les différents points matériels qui constituent les corps reprennent leurs positions initiales. La force vive absorbée pendant la déformation est restituée, de sorte que la force vive totale n'a pas varié. Nous verrons alors que $W_1 = -W_0$. Entre ces deux cas extrêmes, se placent les cas intermédiaires, pour lesquels la force vive diminue. Dans ce cas e étant un nombre compris entre zéro et un $W_1 = -eW_0$.

Considérons en effet les deux corps (S) et (S') (fig. 180).

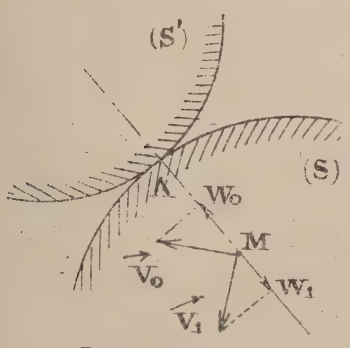

Fig. 180

Il y a équilibre pour chacun des corps entre les quantités de mouvement perdues et les percussions extérieures. On sait que la somme des travaux des quantités de mouvement perdues et des percussions directement appliquées est nulle pour tout déplacement virtuel

compatible avec les liaisons existant pendant le choc. Nous prendrons comme déplacement virtuel le déplacement $V_0\,dt$, puis le déplacement $\overrightarrow{V_1\,dt}$. Pour évaluer les travaux, nous supposerons le corps (S') fixe, car ces travaux sont indépendants du système de comparaison. Pour le déplacement $\overrightarrow{V_0\,dt}$ on a

$$\Sigma m\overrightarrow{(V_0 - V_1)}.V_0 - P.W_0 = 0\,,$$

P désignant la percussion en A du solide (S') sur le solide (S); c'est la seule percussion directement appliquée sur (S).

Pour le déplacement $\overrightarrow{V_1\,dt}$, on a de même,

$$\Sigma m\overrightarrow{(V_0 - V_1)}.\overrightarrow{V_1} - P.W_1 = 0\,;$$

et, en ajoutant ces deux égalités membre à membre,

$$\Sigma m\,\overline{V_0}^2 - m\overline{V_1}^2 = P.(W_0 + W_1)\,.$$

Dans le cas où les corps (S) et (S') sont parfaitement élastiques, la force vive perdue est nulle, alors

$$W_0 + W_1 = 0 \quad , \quad W_1 = -W_0\,.$$

Dans tous les cas, comme la force vive n'augmente pas, $W_0 + W_1 < 0$ étant un nombre compris entre zéro et un, on a

$$W_1 = -e\,W_0\,.$$

140 – <u>Exemples</u>. I – Un <u>mouton</u> de masse m doit enfoncer dans le sol un pilotis de masse m'. Un mouton est un cylindre d'axe vertical que l'on remonte à une certaine hauteur, puis qu'on laisse tomber entre des glissières verticales, sur la tête du pilotis. Soit V_0 la vitesse au moment du choc. Nous admettrons que le cylindre agit comme un corps inélastique et reste adhérent au pilotis à la fin du choc. Le système totale de masse $m + m'$, descend avec la vitesse initiale V_1. Pour ce système, il n'y a pas de percussions extérieures, donc, la

somme des quantités de mouvement n'a pas varié :

$$m V_0 = (m + m') V_1 .$$

La perte de force vive est

$$m V_0^2 - (m+m') V_1^2 = m V_0^2 - \frac{m^2 V_0^2}{(m+m')} = \frac{m m' V_0^2}{m+m'} .$$

La force vive du système est absorbée par le travail des réactions du sol lorsque le pilotis s'enfonce. Il y a intérêt à ce que cette force vive soit la plus grande possible. Pour un travail donné T, travail qui correspond à la marche ascendante du mouton, $m V_0^2$ est donné, c'est le double de T, comme le montre le théorème des forces vives appliqué au mouton partant du repos et arrivant au bout de sa marche ascendante. La perte de force vive au moment du choc est $\frac{2 m' T}{m+m'}$; il faut augmenter m, masse du mouton pour diminuer la perte de force vive due au choc, et par conséquent puisque $m V_0^2 = 2T$, réduire V_0. Si le corps mobile devait agir à la manière d'un bélier, c'est-à-dire détruire un corps de masse m', il faudrait, pour un travail donné T, augmenter la force vive absorbée par la déformation de ce corps, augmenter V_0 et, par suite, réduire m.

II – Soient deux sphères de centres O et O', de masses m et m', animées de mouvements de translations rectilignes et uniformes tels que leurs centres décrivent la même droite (D). Soient V_0 et V_0' les valeurs algébriques des vitesses. Les deux sphères se choquent. Soient v_1 et v_1' les vitesses après le choc. Il n'y a pas de percussion extérieure, donc la somme des quantités de mouvement est invariable :

$$(1) \quad m v_0 + m' v_0' = m v_1 + m' v_1' .$$

Après le choc les mouvements sont encore des translations parallèles à (D), comme on le voit en remarquant que, au centre de chaque sphère, la somme des moments des quantités de mouvement est nulle, à la fin du choc,

comme au début, car la percussion provenant du choc passe par les centres des sphères : il n'y a pas de rotation. Après le choc, d'après la loi de Newton, la vitesse relative de la sphère O' par rapport à la sphère O a changé de sens et a été multiplié par un nombre e compris entre zéro et un. On a donc

$$(2) \qquad v'_1 - v_1 = -e\,(v'_0 - v_0)\,.$$

En résolvant les deux équations (1) et (2) par rapport à v' et v, on obtient

$$v_1 = v_0 + \frac{m'}{m+m'}\,(1+e)(v'_0 - v_0)$$

$$v'_1 = v'_0 - \frac{m}{m+m'}\,(1+e)(v'_0 - v_0)\,.$$

Si les deux corps sont parfaitement mous, $e = 0$, alors

$$v_1 = v'_1 = \frac{m v_0 + m' v'_0}{m+m'}$$

Si les sphères sont parfaitement élastiques, $e = 1$, alors

$$v_1 = v'_0 + \frac{m-m'}{m+m'}\,(v_0 - v'_0)\,,\quad v'_1 = v_0 + \frac{m-m'}{m+m'}\,(v_0 - v'_0)$$

Lorsque $m = m'$, $v_1 = v'_0$ et $v'_1 = v_0$; chacune des sphères a, après le choc, la vitesse qu'avait l'autre avant le choc, et tout se passe comme si les deux sphères s'étaient simplement traversées sans modifier leur mouvement.

Calculons dans le cas général la force vive perdue pendant le choc. Avant le choc, la force vive du système de deux sphères était $m v_0^2 + m' v_0'^2$, après le choc elle est $m v_1^2 + m' v_1'^2$; la perte de force vive est donc

$$m v_0^2 + m' v_0'^2 - (m v_1^2 + m' v_1'^2) = m(v_0^2 - v_1^2) + m'(v_0'^2 - v_1'^2).$$

expression qui est égale à

$$\frac{m\,m'}{m+m'}\,(1-e^2)(v'_0 - v_0)^2$$

Cette quantité est toujours positive, sauf dans le cas où les sphères sont parfaitement élastiques, cas où elle est nulle. D'autre part, elle est maximum quand $e = 0$, c'est-à-dire quand les corps sont parfaitement mous.

Chapitre VII

Systèmes déformables.

Equilibre des fils.

Un fil est une suite d'éléments matériels liés les uns aux autres de façon que l'ensemble soit inextensible.

Faisons une section en un point C du fil (fig. 181); pour maintenir le fil dans sa position première, il faudra appliquer en C un système de forces remplaçant l'effet de la portion enlevée CB; ce système de forces est équivalent à une force $\vec{T}$, appelée tension, et à un couple d'axe $\vec{\gamma}$. Ce couple $\vec{\gamma}$ mesure la raideur du fil; s'il est nul, on dit que l'on a un fil sans raideur, c'est-à-dire flexible : en chaque point du fil, l'action de la partie droite CB se réduit alors à une force unique $\vec{T}$, la tension. L'action de la partie gauche CA est équivalente à la force directement opposée $-\vec{T}$.

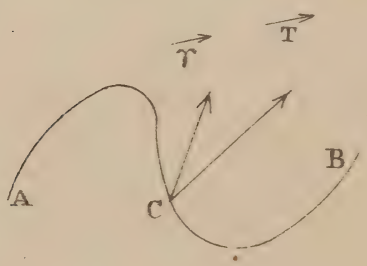

Fig. 181

Considérons un fil flexible AB et choisissons sur la

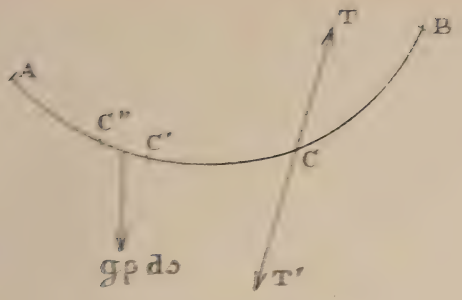

Fig. 182

courbe qui le représente un sens positif. Figurons la tension $\overrightarrow{CT}$, qui représente l'action, en C, de la portion CB. Sur une petite portion C'C'' du fil (fig. 182), de longueur ds, agit la pesanteur

$$g\rho\, ds,$$

ρ étant la densité linéaire du fil; le poids spécifique étant $p = \rho g$, la force qui s'exerce sur l'élément ds du fil peut s'écrire :

$$F = p\, ds;$$

elle est du premier ordre par rapport à ds et le quotient $\frac{F}{ds} = p$. On peut dire qu'il a pour limite p, quand ds tend vers zéro.

Nous supposerons que la propriété précédente soit vraie pour toutes les forces agissant sur le fil; toute force appliquée à un élément ds sera de la forme $\overrightarrow{F}ds$.

141 — Conditions d'équilibre d'un fil. — Considérons le fil comme une chaîne d'éléments et écrivons que chaque élément est en équilibre.

L'action de la partie droite du fil sur C' (fig. 183) est la tension $\overrightarrow{T'}$ en C'; l'action de la partie gauche du fil sur C est $-\overrightarrow{T}$, car l'action de la partie droite sur C est la tension $\overrightarrow{T}$ en C. Enfin, la force extérieure agissant sur le segment ds est $\overrightarrow{F}ds$.

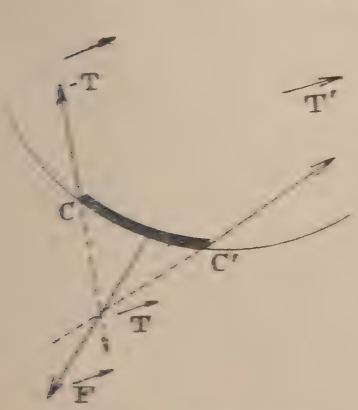

Fig. 183

Écrivons que ces trois forces se font équilibre. Écrivons

d'abord que leur résultante est nulle ; on obtient la condition :

$$\vec{T'} - \vec{T} + \vec{F}\,ds = 0 .$$

Posons $\vec{T'} - \vec{T} = \Delta\vec{T}$,

la condition précédente devient :

$$\frac{\Delta\vec{T}}{ds} + \vec{F} = 0$$

Lorsque ds tend vers zéro, la condition d'équilibre s'écrit

$$(1) \qquad \frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{F} = 0 .$$

Ecrivons ensuite que le moment résultant des trois forces est nul ; il vient :

$$m^t\vec{T'} - m^t\vec{T} + m^t\vec{F}\times\vec{ds} = 0 ,$$

ou :

$$\frac{\Delta\overrightarrow{m^t T}}{ds} + \overrightarrow{m^t F} = 0 ,$$

qui devient à la limite, $\vec{\mathcal{G}}$ étant le moment de la force $\vec{F}$:

$$(2) \qquad \frac{d}{ds}\left(\overrightarrow{m^t T}\right) + \vec{\mathcal{G}} = 0 .$$

Les équations vectorielles (1) et (2) nous donnent les conditions d'équilibre. Elles se traduisent analytiquement par six équations.

Remplaçons le système des équations (1) et (2) par un système équivalent. Prenons les moments au point O :

$$\overrightarrow{m^t T} = \overrightarrow{OC}\times\vec{T} ,$$

$$\vec{\mathcal{G}} = \overrightarrow{OC}\times\vec{F} ;$$

d'où :

$$\frac{d}{ds}\left(\overrightarrow{m^t T}\right) = \frac{\overrightarrow{d(OC)}}{ds}\times\vec{T} + \overrightarrow{OC}\times\frac{d\vec{T}}{ds}$$

et l'équation (2) s'écrit :

$$\frac{\overrightarrow{dOC}}{ds}\times\vec{T} + \overrightarrow{OC}\left[\frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{F}\right] = 0 ,$$

c'est-à-dire, en tenant compte de l'équation (1),

$$\frac{\overrightarrow{d(OC)}}{ds} \times \vec{T} = 0$$

Mais $\frac{\overrightarrow{d(OC)}}{ds}$ représente un vecteur $\vec{V}$ tangent en C à la courbe, et la condition :

$$\vec{V} \times \vec{T} = 0$$

montre que la tension $\vec{T}$ et le vecteur $\vec{V}$ ont même support.

La tension $\vec{T}$ est donc tangente à la courbe et, cette condition remplie, l'équilibre s'exprimera simplement par l'équation (1) :

$$\frac{\overrightarrow{dT}}{ds} + \vec{F} = 0.$$

Projetons sur les trois axes de coordonnées. Les paramètres directeurs de la tangente en C à la courbe étant

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds},$$

les composantes de la tension sont :

$$T\alpha, \quad T\beta, \quad T\gamma$$

et l'équation (1) est équivalente aux trois équations

$$\frac{d(T\alpha)}{ds} + X = 0, \qquad d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X\,ds = 0,$$

$$\frac{d(T\beta)}{ds} + Y = 0, \quad \text{ou} \quad d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y\,ds = 0,$$

$$\frac{d(T\gamma)}{ds} + Z = 0, \qquad d\left(T\frac{dz}{ds}\right) + Z\,ds = 0.$$

X, Y, Z désignant les composantes de la force $\vec{F}$ suivant les axes choisis.

Soient $x = f(s)$, $y = g(s)$, $z = h(s)$ les trois fonctions représentant la courbe figurée par le fil ; elles vérifient les trois équations précédentes et la relation :

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

ce qui fait quatre équations différentielles par rapport à x, y, z, T ; elles sont du premier ordre par rapport à T, du second par rapport à x et y par exemple ; z est ensuite donné par une équation du premier ordre.

Revenons aux équations

$$\frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{F} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{d\,m^t T}{ds} + \mathcal{G} = 0 \qquad (2)$$

pour examiner quelques cas particuliers :

142 — 1° <u>La force F est centrale</u>. — Soit O le centre des forces $\vec{F}$ (fig. 184) ; on a $\vec{\mathcal{G}} = 0$, donc, d'après l'équation (2), le moment de la tension T est un vecteur constant $\vec{\gamma}$; donc, la tension $\vec{T}$ est dans le plan (P) perpendiculaire en O à $\vec{\gamma}$; le point M reste dans ce plan et la figure d'équilibre du fil est une courbe plane.

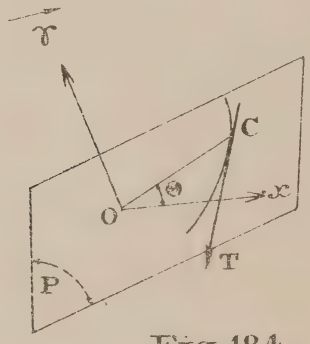

Fig. 184

Prenons des coordonnées polaires dans le plan (P) ; le moment, par rapport à O, du vecteur $ds = r\,d\theta$ est $r^2 d\theta$; le moment du vecteur T est donc

$$\frac{T r^2 d\theta}{ds} \ ;$$

d'où l'équation

$$T r^2 \frac{d\theta}{ds} = C \ ;$$

c'est une intégrale première du système.

143 — 2° <u>La force F est parallèle à une direction fixe</u>. — Prenons cette direction comme axe Oz et menons

par O un vecteur $\overrightarrow{OT}$ égal à la tension T (fig. 185). Le vecteur $\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = -\vec{F}$ est parallèle à Oz ; le point T se déplace donc sur la parallèle (Δ) à Oz ; la figure d'équilibre est une courbe dont toutes les tangentes restent parallèles à un plan, c'est-à-dire une courbe située dans un plan parallèle à Oz. La projection OT' de la tension, sur la perpendiculaire à la direction Oz, c'est-à-dire à la direction de la force, est constante.

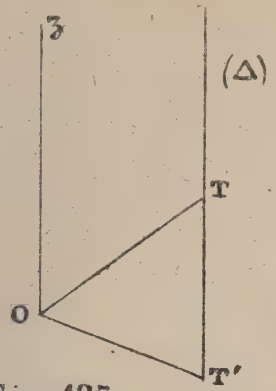

Fig. 185

3°- La force $\vec{F}$ dérive d'une fonction de forces.

Reprenons l'équation

$$dT + F ds = 0.$$

Si $\vec{F}$ dérive d'un potentiel, on a :

$$F ds = dU$$

d'où

$$dT + dU = 0,$$

$$T + U = h$$

C'est une intégrale première.

144 - Équations intrinsèques de l'équilibre. - Le vecteur $\vec{T}$ étant porté par la tangente au fil, on a, $\vec{V}$ désignant le vecteur +1 porté par cette tangente

$$\vec{T} = T.\vec{V}, \qquad (T > 0)$$

d'où

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{dT}{ds}.\vec{V} + T.\frac{d\vec{V}}{ds}$$

ce qui montre que le vecteur $\frac{d\vec{T}}{ds}$ est la somme de deux vecteurs, l'un $\frac{dT}{ds}$ porté par la tangente, l'autre $T \times \frac{d\vec{V}}{ds}$. Mais, si l'arc s représente le temps, le point

correspondant décrit la courbe d'un mouvement uniforme, avec une vitesse constante $\frac{ds}{dt} = 1$; l'extrémité V du vecteur $\overrightarrow{V}$ décrit donc l'hodographe du mouvement qui est un cercle et $\frac{\overrightarrow{dV}}{ds}$, représentant la vitesse du point V sur cette hodographe, est l'accélération du mouvement ; c'est l'accélération normale puisque la vitesse est constante ; donc

$$\frac{dV}{ds} = \frac{v^2}{\rho} = \frac{1}{\rho},$$

ρ désignant le rayon de courbure au point considéré ; ce vecteur est porté par la normale principale. Donc le vecteur $\overrightarrow{T \times \frac{dV}{ds}}$ est porté par la normale principale au fil et a pour mesure $\frac{T}{\rho}$.

Comme les vecteurs $\frac{\overrightarrow{dT}}{ds}$ et $\overrightarrow{F}$ sont opposés, la force $\overrightarrow{F}$ est dans le plan osculateur de la courbe et elle est dirigée dans la convexité de la courbe (fig. 186).

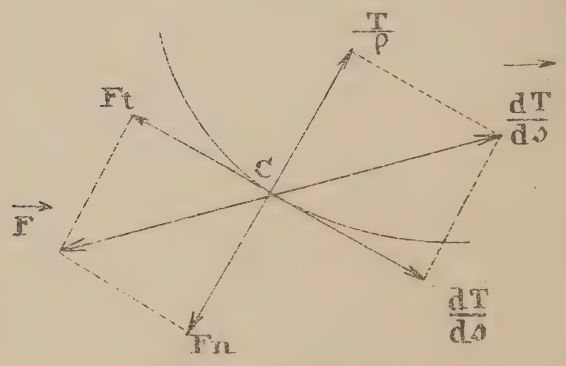

Fig. 186

Les équations intrinsèques de l'équilibre, obtenues en projetant l'équation (1) sur la tangente, la normale et la binormale en C, sont donc :

$$\frac{dT}{ds} + F_t = 0$$

$$\frac{T}{\rho} + F_n = 0$$

$$F_b = 0$$

Remarquons qu'ici $\frac{dT}{ds}$ est un nombre et non plus un vecteur et que la première équation s'écrit, quand il y a une fonction de forces :

$$dT + F_t\, ds = 0$$

ou $$dT + dU = 0$$

ou $$T + U = h.$$

145 — **Mouvement d'un fil.** — *Il suffit de considérer chaque élément du fil comme en équilibre sous l'action des forces directement appliquées $\vec{F}$ et des forces d'inertie $-\rho\vec{J}$; l'équation du mouvement est donc*

$$\frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{F} - \rho\vec{J} = 0.$$

équation vectorielle que l'on peut projeter sur les trois axes, pour obtenir trois équations, dont la première est

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(T\frac{dx}{ds}\right) - \rho\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + X = 0.$$

les coordonnées x, y, z d'un point du fil sont cette fois fonctions de s et t, ce qui nous conduit à des équations aux dérivées particlles.

146 — **Exemple d'équilibre. — Chaînette.** *Trouver la figure d'équilibre, d'un fil pesant, homogène, de longueur l, fixé à ses deux extrémités A et B.*

La force $\vec{F}$, qui se réduit ici au poids ayant une direction constante, la figure d'équilibre est plane et située dans le plan vertical passant par AB. Prenons ce plan comme plan de coordonnées (fig. 187), si p désigne le poids spécifique du fil, les équations d'équilibre s'écrivent

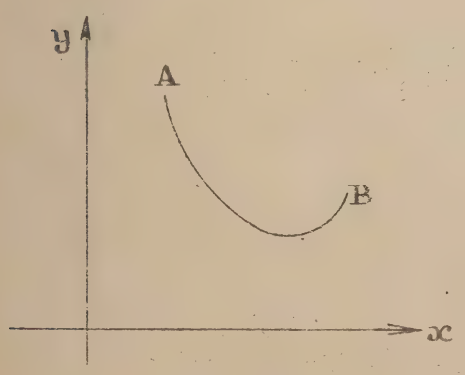

Fig. 187

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0$$

$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right) - p\,ds = 0.$$

l'axe Oy étant vertical et dirigé vers le haut.

On en déduit

$$T\frac{dx}{ds} = A$$

A étant une constante; la composante horizontale

de la tension a donc une valeur constante A, comme nous l'avons vu précédemment.

On a ainsi

$$\frac{T}{ds} = \frac{A}{dx} ,$$

et $$dx^2 + dy^2 = ds^2 ;$$

la seconde équation d'équilibre peut s'écrire

$$d(Ay') - p\sqrt{1+y'^2}\,dx = 0$$

ou

$$A\,dy' - p\sqrt{1+y'^2}\,dx = 0$$

Posons $\frac{A}{p} = a$; l'équation précédente devient :

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{dx}{a}$$

L'intégration donne

$$\log\left(y' + \sqrt{1+y'^2}\right) = \frac{x - x_0}{a} ,$$

d'où $$y' + \sqrt{1+y'^2} = e^{\frac{x-x_0}{a}}$$

Mais $\sqrt{1+y'^2} - y'$ est l'inverse de $y' + \sqrt{1+y'^2}$; donc :

$$\sqrt{1+y'^2} - y' = e^{-\frac{x-x_0}{a}}$$

D'où, en retranchant membre à membre :

$$y' = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{x-x_0}{a}} - e^{-\frac{x-x_0}{a}}\right] = Sh\,\frac{x-x_0}{a}$$

et

$$y - y_0 = a\,Ch\,\frac{x-x_0}{a}$$

Transportons l'origine au point $x_0\,y_0$,

$$x = x_0 + X \quad , \quad y = y_0 + Y$$

l'équation devient :

$$Y = a\,Ch\,\frac{X}{a} ;$$

elle représente une chaînette de base $\underline{a}$.

Déterminons les trois constantes $x_0\ y_0\ a$ par les trois conditions imposées à la courbe, savoir : passer par A, passer par B, avoir pour longueur l.

Prenons le point d'attache le plus bas comme origine O et soit P, de coordonnées α et β, l'autre point d'attache; on a $\beta \geqslant 0$ et nous pouvons supposer $\alpha > 0$.

Ecrivons que la courbe :

$$y - y_0 = a \operatorname{Ch} \frac{x - x_0}{a}$$

passe par O et P ; on obtient :

$$-y_0 = a \operatorname{Ch} \frac{x_0}{a}$$

$$\beta - y_0 = a \operatorname{Ch} \frac{\alpha - x_0}{a}$$

Ecrivons ensuite que le fil a pour longueur l. Calculons pour cela l'arc de la courbe. On a

$$\sqrt{1+y'^2} + y' = e^{\frac{x-x_0}{a}}$$

$$\sqrt{1+y'^2} - y' = e^{-\frac{x-x_0}{a}}$$

d'où :

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2} = \operatorname{Ch} \frac{x - x_0}{a}$$

et

$$s = a \operatorname{Sh} \frac{x - x_0}{a},$$

en comptant les arcs à partir du sommet de la chaînette. Donc

$$l = s_P - s_0 = a \left[\operatorname{Sh} \frac{\alpha - x_0}{a} + \operatorname{Sh} \frac{x_0}{a} \right],$$

et, d'autre part,

$$\beta = a \left[\operatorname{Ch} \frac{\alpha - x_0}{a} - \operatorname{Ch} \frac{x_0}{a} \right].$$

Ajoutons et retranchons ces deux égalités ; il vient :

$$l + \beta = a \left[e^{\frac{\alpha - x_0}{a}} - e^{-\frac{x_0}{a}} \right] = a e^{-\frac{x_0}{a}} \left[e^{\frac{\alpha}{a}} - 1 \right]$$

$$l - \beta = a \left[e^{\frac{x_0}{a}} - e^{\frac{x_0 - \alpha}{a}} \right] = a e^{\frac{x_0}{a}} \left[1 - e^{-\frac{\alpha}{a}} \right]$$

En éliminant x_0, on obtiendra une relation qui déterminera a, multiplions membre à membre

$$l^2 - \beta^2 = a^2\left[e^{\frac{\alpha}{a}} + e^{-\frac{\alpha}{a}} - 2\right]$$

$$l^2 - \beta^2 = a^2\left[e^{\frac{\alpha}{2a}} - e^{-\frac{\alpha}{2a}}\right]^2 = 4a^2 Sh^2 \frac{\alpha}{2a}.$$

ou

$$\sqrt{l^2 - \beta^2} = 2a\, Sh \frac{\alpha}{2a}$$

car le second membre est positif puisque $\alpha > 0$.

Faisons un changement d'inconnue en prenant

$$u = \frac{\alpha}{2a}$$

Il vient :

$$\sqrt{l^2 - \beta^2} = \frac{\alpha}{u} Sh\, u.$$

Nous sommes donc ramenés à résoudre l'équation en u :

$$(3) \qquad Sh\, u = \frac{\sqrt{l^2 - \beta^2}}{\alpha} u.$$

Connaissant u, on calcule a, puis x_0, puis y_0.

Nous résoudrons graphiquement l'équation (3).

La droite $y = \frac{\sqrt{l^2 - \beta^2}}{\alpha} u$ coupe la courbe $y = Sh\, u$, si la pente de cette droite est supérieure à 1 ; on doit donc avoir

$$l^2 - \beta^2 > \alpha^2 \quad \text{ou} \quad l^2 > \alpha^2 + \beta^2,$$

c'est-à-dire que la longueur du fil doit être supérieure à celle de la corde OP.

La figure 189 montre qu'on obtient deux valeurs opposées de u, donc deux chaînettes évidemment symétriques par rapport au milieu ω de OP (fig. 188) ; mais dans le cas d'un fil flexible, l'équilibre exige $T > 0$, c'est-à-dire $a > 0$; donc la chaînette supérieure serait la figure d'équilibre pour une chaîne formée par une suite de billes juxtaposées.

Calculons la tension. Avec les axes $o'x$, $o'y$, $o'x$

étant la base de la chaînette, l'équation de la chaînette est

$$y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}.$$

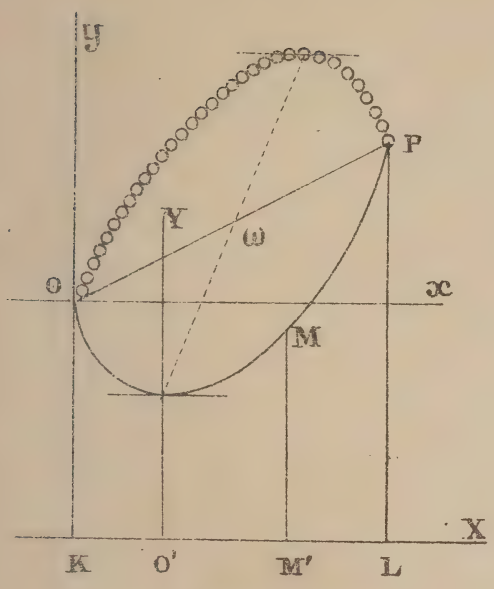

Fig. 188

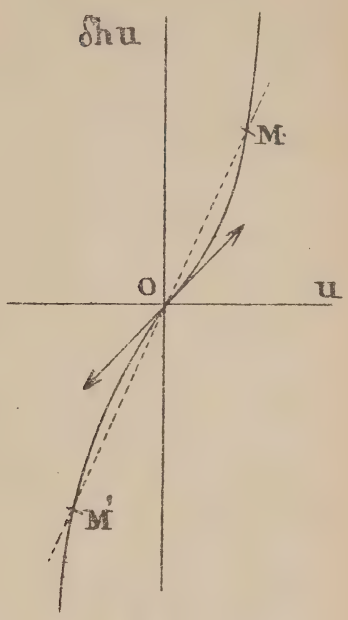

Fig. 189

On a :

$$\frac{ds}{dx} = \mathrm{ch}\,\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{a}$$

L'équation $T\,\frac{dx}{ds} = A = ap$ donne alors :

$$T\,\frac{a}{y-y_0} = ap \quad , \quad \text{d'où} \quad T = p(y-y_0)$$

La tension en M est donc égale au poids d'une longueur MM' de fil qui irait verticalement de M à la base de la chaînette. En particulier si, aux extrémités O et P, on place des fils de longueurs OK et PL passant sur de petites poulies en O et P, le fil OMP reste en équilibre.

147 — Remarque. — Supposons (fig. 190) que O et P soient sur la même horizontale ; le point O étant fixe, plaçons en P une petite poulie et tirons le brin

libre avec une forte tension, la chaînette se tend ; formons son équation.

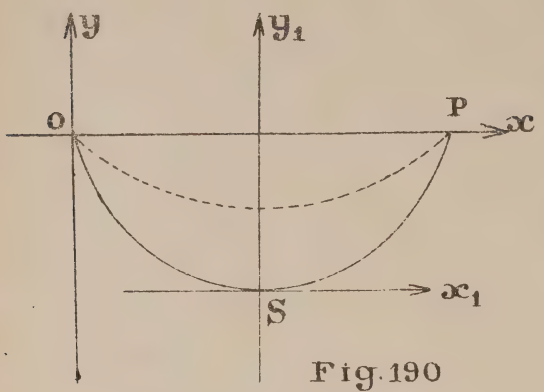

Fig. 190

Transportons l'origine au sommet S ; l'équation de la chaînette est alors :

$$y_1 = a\left(\mathrm{ch}\,\frac{x_1}{a} - 1\right)$$

Or,

$$\mathrm{ch}\,\lambda = 1 + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^4}{4!} + \ldots,$$

donc

$$y_1 = a\left[\frac{x_1^2}{2a^2} + \frac{x_1^4}{4!\,a^4} + \ldots\right],$$

c'est-à-dire

$$y_1 = \frac{x_1^2}{2a} + \frac{x_1^4}{4!\,a^3} + \ldots$$

La longueur du fil étant l ; on a toujours

$$|x_1| \leqslant \frac{1}{2}\,OP \leqslant \frac{1}{2}\,l,$$

d'où

$$\left|\frac{x_1}{a}\right| < \frac{l}{2a} = \frac{pl}{2T},$$

puisque $T = A = ap$.

Supposons T assez grand pour qu'on puisse négliger les puissances de $\frac{pl}{2T}$ supérieures à la deuxième, on obtient alors

$$y_1 = \frac{x_1^2}{2a}$$

la courbe est très voisine d'une parabole de sommet S et d'axe vertical.

D'autre part,

$$\frac{ds}{dx} = \mathrm{ch}\,\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{a};$$

$\left|\frac{ds}{dx}\right|$ reste voisin de 1 ; l'angle de la tangente à la courbe

avec Ox reste petit. On peut alors confondre ds et dx, pds et pdx ; tout se passe comme si le poids s'exerçant sur chaque élément du fil était proportionnel non à la longueur de cet élément, mais à celle de la projection de l'élément sur Ox.

148 – **Deuxième exemple**. — Traitons directement le cas où cette hypothèse est réalisée rigoureusement : la charge élémentaire est $p\,dx$.

On a dans ce cas

$$T\frac{dx}{ds} = A$$

$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right) - p\,dx = 0\ ;$$

d'où

$$\frac{T}{ds} = \frac{A}{dx}\ ,$$

$$A\,d\left(\frac{dy}{dx}\right) - p\,dx = 0\ ;$$

et, en intégrant, avec $\frac{A}{p} = a$,

$$y = \frac{x^2}{2a} + mx + n$$

On retrouve ainsi la parabole.

149 – **Pont suspendu**. — Soit AB le tablier formé d'une série de poutres égales et équidistantes (fig. 191) ; à chaque extrémité la poutre est soutenue par un tirant vertical et ces tirants viennent s'attacher à un câble. Cherchons la figure formée par le câble.

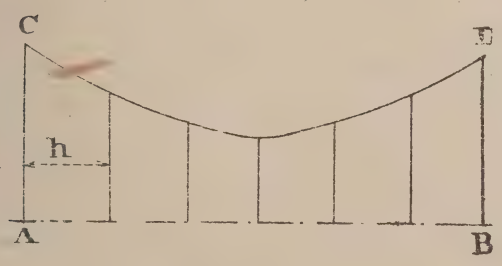

Fig. 191

Soit h la distance de deux tirants, ph le poids supporté par chaque tirant. Le câble est ainsi formé d'une suite de segments soumis à des poids égaux appliqués en chaque sommet (fig. 192).

Écrivons que, en chaque sommet, le nœud est en équilibre sous l'action de la tension de gauche $\overrightarrow{T_1}$, de la tension de droite $\overrightarrow{T_2}$ et du poids. La figure 193 montre que les composantes horizontales de toutes les tensions sont

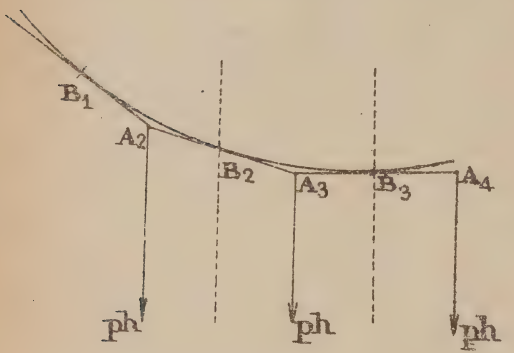

Fig. 192

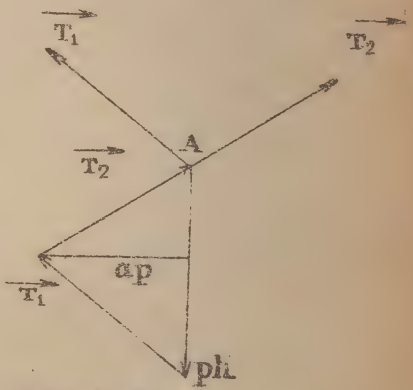

Fig 193

égales, soit ap leur valeur commune. D'un segment du câble à l'autre, la pente varie de

$$\frac{ph}{pa} = \frac{h}{a};$$

cette variation est donc constante.

Or, dans une parabole, d'axe vertical P et de paramètre a $x^2 = 2ay$, si l'on prend une suite de points d'abscisses équidistantes de h, les pentes en ces points varient aussi en progression arithmétique dont la raison $(\Delta y')$ est $\frac{h}{a}$. Montrons que le polygone formé par le câble est circonscrit à une parabole d'axe vertical.

On peut, en effet, construire une parabole (P) tangente aux deux premiers côtés en leurs milieux B_1, B_2 ; le paramètre de cette parabole est

$$\frac{h}{\Delta y'} = a.$$

Je dis que la parabole (P) est tangente à tous les côtés du polygone en leurs milieux.

Si l'on construit en effet une parabole (P') tangente en B_2 et B_3 aux deuxième et troisième côtés, cette parabole (P') coïncide avec (P) car, en B_2, elles ont toutes deux même y, même pente y'; et même y'', puisque elles ont le même paramètre a. On peut dire aussi : la tangente à (P) en B_2 rencontre en A_3 un diamètre de (P); en ce point A_3 passe une autre tangente à la parabole (P) dont le point de contact est sur le diamètre de B_3. Cette tangente est le côté $A_3 A_4$ dont la pente diffère de $\frac{h}{a} = k h$ de celle de $A_2 A_3$, le point de contact est donc B_3; et ainsi de suite.

150 — <u>Fils soumis à des liaisons</u>. — <u>Cas des liaisons aux limites</u>. — Considérons d'abord un fil dont une extrémité O est fixe, l'autre extrémité A étant assujettie à glisser sans frottement par l'intermédiaire d'un anneau par exemple, sur une courbe rigide (C) (fig. 194).

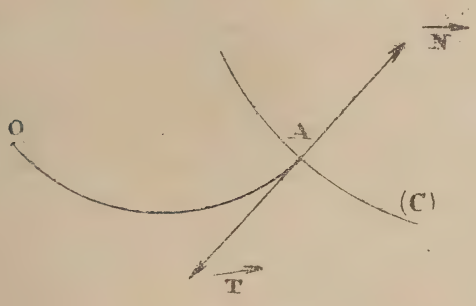

Fig. 194

L'anneau A est soumis à la tension $\vec{T}$ du fil et à la réaction $\vec{N}$ de la courbe. Dans la position d'équilibre, ces deux forces doivent être directement opposées; le fil doit donc se placer orthogonalement en A à la courbe.

On traiterait de même le cas d'un fil dont les deux extrémités glissent sur des courbes ou des surfaces.

151 — <u>Fil placé sur une surface</u>. — Considérons un fil qui s'appuie sur une surface et soit AB, la portion de fil reposant sur la surface, supposons qu'entre

A et B le fil ne soit soumis à aucune force autre que les actions de la surface, ou que la masse de l'arc AB soit négligeable ; nous allons montrer que <u>le système des actions exercées par le fil sur la surface est équivalent au système des deux tensions extrêmes (fig. 195)</u>.

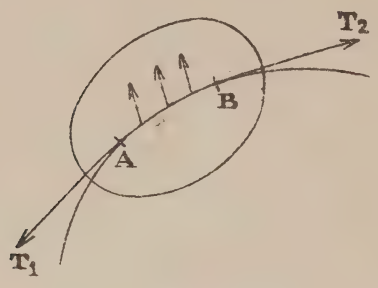

Fig. 195

Considérons, en effet, l'arc AB du fil ; cet arc est en équilibre sous l'action des tensions $\vec{T_1}$ et $\vec{T_2}$ et de l'ensemble des réactions exercées par la surface sur AB. Les actions du fil sur la surface étant directement opposées à ces réactions forment bien un système équivalent à $\vec{T_1}$, $\vec{T_2}$.

On obtient un cas limite du précédent lorsque le fil est attaché en A à la surface et repose suivant l'arc AB (fig. 196) ; l'unique tension $\vec{T_1}$ en B est équivalente au système des actions du fil sur la surface.

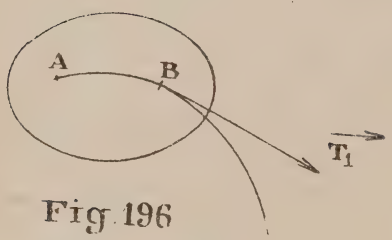

Fig. 196

De même, lorsque le fil ne touche la surface qu'en un point d'attache A, la tension $\vec{T}$ en A représente l'action du fil sur la surface (fig. 197).

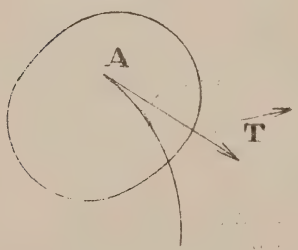

Fig. 197

Lorsque le fil n'est pas soumis à d'autre force que la réaction de la surface, cette dernière étant normale ou non, le plan osculateur à la courbe figurée par le fil est normal à la surface ; cette courbe est donc une <u>géodésique</u> de la surface.

Dans ce cas, s'il n'y a pas

de frottement, c'est-à-dire si la réaction est normale, l'équation

$$\frac{dT}{ds} + F_t = 0$$

donne

$$\frac{dT}{ds} = 0$$

La tension T se conserve donc en tous les points du fil.

Au contraire, s'il y a frottement, la tension est modifiée. étudions un cas particulier.

Soit (fig. 198) un fil enroulé sur la section droite d'un cylindre suivant l'arc AB; la réaction de la surface sur un élément M de AB est oblique; $\vec{F}$ et $\vec{N}$ étant ses composantes tangentielle et normale, l'équilibre de cet élément subsiste tant que

$$\frac{F}{N} < f.$$

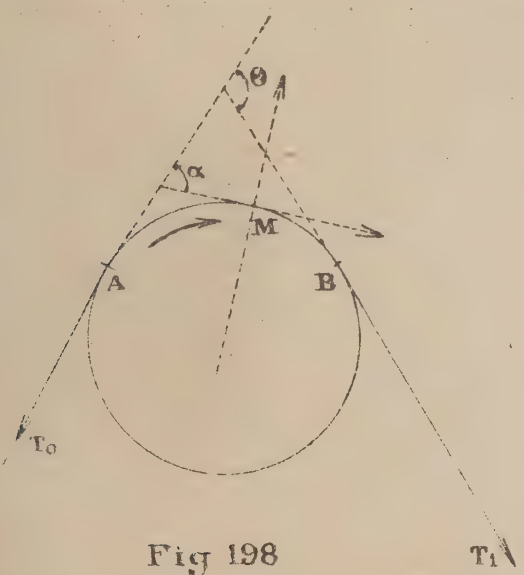

Fig 198

Supposons que le mouvement commence; le fil se met à glisser vers la droite, par exemple, et, comme on le suppose inextensible, tous ses points se mettent en mouvement en même temps; on a, pour tous ces points, au début du mouvement, la relation :

$$\frac{F}{N} = f$$

Ecrivons les équations intrinsèques de l'équilibre limite

$$\frac{dT}{ds} - F = 0.$$

$$\frac{T}{\rho} - N = 0.$$

La relation $\frac{F}{N} = f$ donne

$$\frac{dT}{T} \cdot \frac{\rho}{ds} = f$$

Or, α étant l'angle de la tangente positive en M au fil avec une direction fixe, AT_0, par exemple, on a

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha}$$

d'où

$$\frac{dT}{T} = f\, d\alpha$$

et, par suite, θ désignant l'angle de la tangente positive en B avec la tangente positive en A,

$$\int_{T_0}^{T_1} \frac{dT}{T} = \log \frac{T_1}{T_0} = f\,\theta,$$

et

$$T_1 = T_0\, e^{f\theta}$$

cette équation correspond au cas où le glissement est sur le point de se produire vers la droite. On a, au contraire :

$$T_1 = T_0\, e^{-f\theta}$$

quand le glissement est près de se produire vers la gauche.

Nous admettrons, que lorsque le fil est en équilibre T_1 est compris entre ces valeurs $T_0\, e^{-f\theta}$ et $T_0\, e^{f\theta}$.

Le facteur exponentiel $e^{f\theta}$ croît très rapidement avec θ, comme le montre le tableau suivant :

Tableau.

	f	Valeurs de $e^{f\theta}$ pour : 1/2 tour	1 tour	2 tours	3 tours
Corde sèche sur chêne	0,5	4,8	23	530	12.000
Courroie sur roue en fonte	0,3	2,6	6,6	43	280
Câble de fer sur roue en fonte	0,15	1,6	2,6	6,6	1,6

La poulie est un organe qui a précisément pour but d'éliminer ce frottement (fig. 199) ; l'action de la poulie sur le fil est équivalente aux tensions extrêmes $\vec{T}_0$ et $\vec{T}_1$, et, dans la position d'équilibre, l'égalité des moments en O nous donne la relation

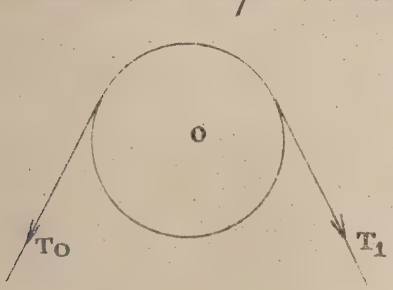

Fig. 199

$$T_0 = T_1$$

152- <u>Extension au cas d'un fil du principe des travaux virtuels</u>. — Nous avons démontré le principe des travaux virtuels dans le cas d'un système composé de solides ; montrons que ce principe est encore applicable au cas où le système comprend des fils flexibles et inextensibles.

Soit un fil AB, de longueur l, attaché à ses deux extrémités A et B ; supposons que les coordonnées x, y, z d'un point M du fil soient exprimées en fonction de l'abscisse curviligne s,

$$x = f(s) , \quad y = g(s) , \quad z = h(s) ,$$

avec

$$f'^2(s) + g'^2(s) + h'^2(s) = 1$$

Donnons au fil un déplacement virtuel compatible

avec les liaisons : cela revient à considérer une autre courbe (C') allant de A en B et de même longueur l (fig. 200) et telle que deux points M et M' de (C) et (C') se correspondent par l'égalité

$$\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AM'} = s$$

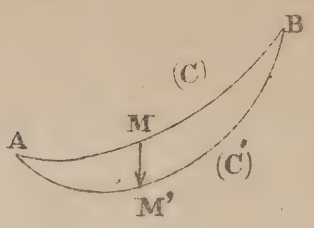

Fig. 200

Désignons par $\delta x, \delta y, \delta z$ les projections de $\overrightarrow{MM'}$.

Les courbes (C') peuvent être représentées par des équations

$$x = f(s,\lambda) \quad , \quad y = g(s,\lambda) \quad , \quad z = h(s,\lambda),$$

les fonctions f, g, h étant définies dans l'intervalle $(0, l)$ pour s et, par exemple, $(0,1)$ pour λ, la condition

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$

étant toujours vérifiée.

On en déduit

$$x'\delta x' + y'\delta y' + z'\delta z' = 0,$$

$\delta x', \delta y', \delta z'$ étant les différentielles de x', y', z', prises par rapport à λ.

Mais le fil (C) étant en équilibre, on a :

$$E_1 \equiv \frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X = 0,$$

$$E_2 \equiv \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y = 0,$$

$$E_3 \equiv \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) + Z = 0.$$

Multiplions ces équations, respectivement, par δx, δy, δz et ajoutons, il vient

$$E' \equiv \frac{d}{ds}(Tx')\delta x + \frac{d}{ds}(Ty')\delta y + \frac{d}{ds}(Tz')\delta z + X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0;$$

comme $E' = 0$ pour toute la valeur de s, on en déduit

$$(1) \qquad \int_0^l E(s)\,ds = c$$

Or, dans cette intégrale, figure le travail élémentaire

$$\delta \mathcal{T} = \int_0^l X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z$$

des forces extérieures ; pour montrer que ce travail est nul, il est nécessaire et suffisant de démontrer que la première partie de l'intégrale est nulle ; or, cette partie se compose de trois termes dont le premier est

$$\int_0^l \frac{d}{ds}(Tx')\,\delta x\,ds$$

qui, intégré par parties, devient

$$\left|Tx'\,\delta x\right|_0^l - \int_0^l Tx'\,d\left(\frac{\delta x}{ds}\right)ds ;$$

Or

$$d\left(\frac{\delta x}{ds}\right) = \delta\left(\frac{dx}{ds}\right) = \delta x'$$

et le terme précédent s'écrit

$$\left|Tx'\,\delta x\right|_0^l - \int_0^l Tx'\delta x'\,ds$$

La première partie de l'intégrale (1) s'écrit alors

$$\left|T(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z\right|_0^l - \int_0^l T(x'\delta x' + y'\delta y' + z'\delta z')\,ds ;$$

or, on a vu que $x'\delta x' + y'\delta y' + z'\delta z' = 0$; la seconde intégrale est donc nulle et la partie intégrée a pour valeur :

$$T_1(x'_1\,\delta x_1 + y'_1\,\delta y_1 + z'_1\,\delta z_1) - T_0(x'_0\,\delta x_0 + y'_0\,\delta y_0 + z'_0\,\delta z_0).$$

Mais le fil étant attaché en A et B, toute courbe (C) doit passer par A et B ; $\overrightarrow{MM'}$ est donc nul en A et en B : l'expression précédente est nulle.

Si l'on suppose seulement que l'une des extrémités A soit fixe, l'autre B étant assujettie à décrire une courbe fixe, la tangente à cette courbe est perpendiculaire à la tension et les deux termes précédents sont encore nuls.

Nous avons ainsi démontré que, s'il y a équilibre, la somme des travaux des forces extérieures est nulle dans tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons. Montrons

que, réciproquement, si cette somme est nulle, la position de (C) est une position d'équilibre.

Nous venons de voir que la première partie de l'intégrale (1) est toujours nulle pour tout déplacement compatible avec les liaisons ; d'autre part, par hypothèse, on a :

$$\int_0^l X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z = 0,$$

Donc

$$\int_0^l E\,ds = \int_0^l (E_1\delta x + E_2\delta y + E_3\delta z)\,ds = 0.$$

Or, les paramètres δx, δy, δz ne sont pas indépendants ; ils sont liés par la relation :

$$x'\delta x' + y'\delta y' + z'\delta z' = 0 ;$$

on ne peut donc disposer que de deux paramètres, par exemple δy et δz. Déterminons T de manière que l'on ait $E_1 = 0$; on aura alors :

$$(2) \qquad \int_0^l (E_2\delta y + E_3\delta z)\,ds = 0,$$

δy et δz étant indépendants. On en déduit

$$E_2 = 0 \quad , \quad E_3 = 0.$$

Supposons en effet que pour une valeur particulière $s = s_0$ de s dans l'intervalle $0, l$ une des fonctions E_2 ou E_3 ne soit pas nulle, E_2 par exemple ; E_2 est une fonction de s, qui serait positive par exemple pour $s = s_0$; comme c'est une fonction continue, il existerait un intervalle $\alpha\beta$ de s, contenant s_0, tel que si s varie de α à β, $E_2(s)$ reste positive.

Prenons alors $\delta z \equiv 0$

$\delta y = 0$ de 0 à α, et de β à l

$\delta y > 0$ de α à β

par exemple $\delta y = (\beta - s)(s - \alpha)$

L'intégrale (2) est nulle partout sauf dans l'intervalle $\alpha\beta$ où elle s'écrit

$$\int_{\alpha}^{\beta} E_2(s)\,\delta_y\,ds\ ;$$

comme $E_2(s) > 0$ et $\delta y > 0$, cette intégrale ne peut être nulle, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il faut donc que l'on ait

$$E_2 = 0\ ,\quad E_3 = 0\ ,$$

et par suite, les coordonnées de (C) vérifient bien les équations

$$E_1 = 0\ ,\qquad E_2 = 0\ ,\qquad E_3 = 0\ .$$

Chapitre VIII

Equilibre des Fluides parfaits.

Hydrostatique.

153 — Définitions. — Considérons un corps déformable.

Soit un élément de ce corps de volume $\Delta\tau$ et de masse Δm ; on appelle densité moyenne de cet élément le rapport $\frac{\Delta m}{\Delta\tau}$.

Si l'élément tend vers zéro dans toutes ses dimensions, nous admettrons que le rapport $\frac{\Delta m}{\Delta\tau}$ tend vers une limite dont la valeur est indépendante de la façon dont l'élément se réduit à un point. Cette limite sera, par définition, la densité au point P du corps considéré.

La densité d'un corps en un point est, en général, fonction des coordonnées x, y, z, de ce point, de la température θ et du temps t :

$$\rho = f(x, y, z, \theta, t).$$

154 — Forces agissant sur les fluides - Fluides parfaits. — Les forces qui agissent sur les fluides peuvent être classées en deux catégories :

1° Forces de masse. — Les forces de masse sont celles

qui agissent sur chaque élément de volume. Nous admettrons qu'elles sont proportionnelles à la masse dm de cet élément, de la forme $\overrightarrow{F}\,dm$ ou $\overrightarrow{F'}\rho\,d\tau$, puisque

$$dm = \rho\, d\tau .$$

$\overrightarrow{F}$ représente la force agissant sur l'unité de masse ; $\overrightarrow{F\rho}$, la force agissant sur l'unité de volume au point considéré.

La pesanteur, par exemple, est une force de cette catégorie : $g\,dm$.

2°- Pressions à la surface. — Un élément de surface d'aire $d\sigma$ est soumis à une action que nous admettrons proportionnelle à $d\sigma$ et représentée par $\overrightarrow{P}\,d\sigma$, $\overrightarrow{P}$ est l'effort exercé sur l'unité de surface ; c'est une pression ou une tension, suivant le sens de cette action.

Considérons les pressions qui agissent à l'intérieur d'une masse fluide limitée par une surface (S) (fig. 202). Dessinons une surface (S') à l'intérieur du fluide et considérons la portion de fluide intérieure à (S').

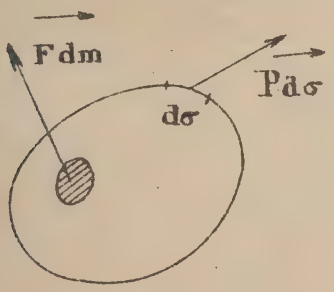

Fig. 201

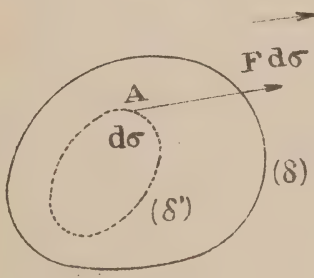

Fig. 202

Elle est soumise, de la part de la portion restante du fluide à des actions superficielles ; il y a donc des forces de pression en tout point A de la surface (S').

Soit un élément superficiel plan d'aire $d\sigma$, passant en A ; distinguons sur cet élément deux côtés et affectons l'un d'eux du signe +, l'autre du signe − ; la demi-normale correspondante sera dite la demi-normale positive ; la demi-normale opposée est la demi-normale négative. L'action sur la face positive sera représentée par un vecteur $\vec{P}d\sigma$; l'action sur la face négative sera alors représentée par $-\vec{P}d\sigma$. Nous ne faisons intervenir ainsi que les actions mutuelles de molécules très voisines, les actions mutuelles des autres molécules étant négligeables, comme le montre l'expérience de Quincke (livre I p.290).

La demi-normale positive étant dirigée vers l'extérieur de la surface (S'), par exemple, nous dirons que l'effort des éléments du fluide extérieur à (S') sur la face positive est une tension ou une pression suivant que la composante $\vec{P}_n$ de l'effort $\vec{P}$ est positive ou négative (fig.203).

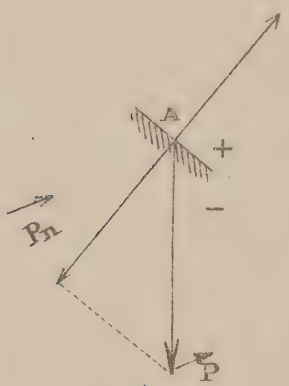

Fig.203

Dans la suite, nous nous bornerons à l'étude de fluides particuliers. Nous supposerons, d'une part, que les actions de surface s'exerçant sur les éléments $d\sigma$, c'est-à-dire les efforts intérieurs sont toujours des pressions. Cette hypothèse est vérifiée dans le cas des gaz : il n'y a pas de cohésion à l'intérieur d'une masse gazeuse et aucune force ne s'oppose à l'écartement des molécules voisines. Nous admettrons que cette hypothèse est valable pour les liquides.

Nous supposerons d'autre part les pressions intérieures normales aux éléments de surface.

Nous appellerons fluides parfaits les fluides qui satisfont aux deux conditions précédentes. Les fluides

réels se rapprochent dans bien des cas des fluides parfaits.

155 — Conditions d'équilibre d'un fluide. — Pour qu'un fluide soit en équilibre, il faut que le système des vecteurs constitués par les forces extérieures soit équivalent à zéro. Cette condition nécessaire d'équilibre est, comme nous l'avons vu, suffisante pour l'équilibre d'un corps solide ; mais elle n'est pas suffisante pour l'équilibre d'un fluide.

Supposons alors le fluide constitué par n molécules ; il faut et il suffit que chaque molécule soit en équilibre. On écrira donc les conditions d'équilibre de chaque molécule en considérant comme des actions extérieures les actions, sur cette molécule, des molécules voisines.

Isolons (fig. 204) un petit cylindre de fluide, de génératrices parallèles à Ox, limité par une section droite d'aire σ_0 et une section oblique d'aire σ, faisant l'angle α avec la section droite.

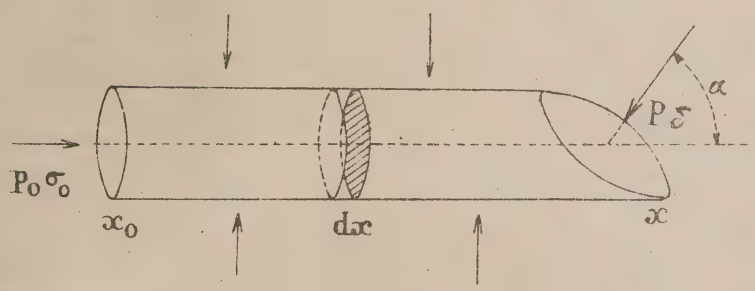

Fig. 204

Cet élément est soumis, de la part des autres molécules, à des pressions normales aux éléments de surface du cylindre : les pressions sur les parois latérales sont perpendiculaires à Ox et les pressions sur les bases σ_0 et σ sont des forces de grandeurs $p_0\sigma_0$ et $p\sigma$ perpendiculaires à ces bases. Une tranche cylindrique d'épaisseur

dx est donc soumise à des pressions perpendiculaires à Ox et à une force $\overrightarrow{F\rho\sigma_0 dx}$, ρ étant la densité du fluide et $\vec{F}$ la force par unité de masse en ce point, de composantes X, Y, Z.

En projetant sur Ox, on obtiendra une condition d'équilibre

$$p_0\sigma_0 - p\sigma\cos\alpha + \int_{x_0}^{x} \sigma_0 \rho X\, dx = 0$$

Or $\sigma\cos\alpha = \sigma_0$, donc

$$p - p_0 = \int_{x_0}^{x} \rho X\, dx.$$

L'angle α n'intervient plus dans cette relation, la pression p est donc la même dans toutes les directions.

La direction Ox est arbitraire ; on a donc aussi

$$p - p_0 = \int_{y_0}^{y} \rho Y\, dy \qquad p - p_0 = \int_{z_0}^{z} \rho Z\, dz$$

Ces relations équivalent aux suivantes :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X,$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = Y,$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = Z.$$

Réciproquement si ces conditions sont vérifiées la masse fluide est en équilibre, car tout élément du fluide est en équilibre. On le vérifie aussitôt pour un petit cube dont les arêtes sont parallèles aux axes de coordonnées.

Pour avoir les équations du mouvement d'une masse fluide, il suffira d'écrire qu'il y a équilibre, en adjoignant aux forces de masse ρX, ρY, ρZ les forces d'inertie $-\rho\frac{d^2x}{dt^2}$, $-\rho\frac{d^2y}{dt^2}$, $-\rho\frac{d^2z}{dt^2}$, par unité de masse ; on obtient ainsi les équations :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{d^2x}{dt^2} \ ,$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = Y - \frac{d^2y}{dt^2} \ ,$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = Z - \frac{d^2z}{dt^2} \ .$$

Les équations d'équilibre ont, comme conséquence, la relation

$$dp = \rho(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) \ ;$$

elle exprime que le champ des forces $\vec{F}$ admet un facteur intégrant.

Il ne peut donc y avoir équilibre, pour un fluide parfait, que si le champ de forces de masse auxquelles il est soumis admet un facteur intégrant ; pour cela il faut et il suffit, ou bien qu'en chaque point du champ le vecteur soit perpendiculaire à son tourbillon, ou bien que le tourbillon soit nul, c'est-à-dire que le champ de forces dérive d'une fonction de forces $U(x, y, z)$.

Plaçons-nous, dans ce dernier cas ; la relation précédente s'écrit :

$$dp = \rho\, dU \ ;$$

elle nous montre que, si U est constant, ρ est constant, p est donc fonction de U seul. Si l'on pose

$$p = \varphi(U)$$

il vient :

$$\rho = \frac{dp}{dU} = \varphi'(U)$$

Donc, sur une surface de niveau $U = C^{te}$, la pression et la densité du fluide sont donc constantes.

Chaque point du fluide est caractérisé par ses coordonnées x, y, z, la pression p, la densité ρ, et la température θ du fluide en ce point. L'étude physique des fluides montre que p, ρ, θ sont liées par une relation :

$$K(p, \rho, \theta) = 0 \ .$$

appelée équation caractéristique du fluide.

Cette équation est, pour un gaz parfait,

$$\frac{p}{\rho(1+\alpha\theta)} = C \qquad \alpha = \frac{1}{273}$$

et, pour un liquide incompressible,

$$\rho = \frac{\rho_0}{1+\alpha\theta}.$$

Supposons, par exemple, que la seule force extérieure agissant sur le fluide soit la pesanteur. Prenons comme axe Oz la verticale descendante; nous aurons :

$$U = gz \qquad \text{et} \qquad dp = \rho g dz.$$

Les surfaces de niveau sont des plans horizontaux.

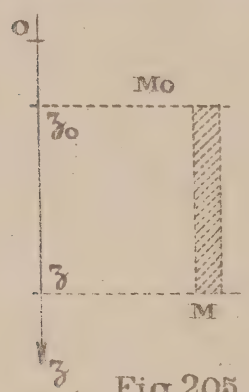

Fig. 205

Evaluons la différence de pression entre deux points $M_0 M$ de cotes z_0 z, en supposant que la densité du fluide reste constante entre ces deux points (fig. 205). Nous aurons

$$p - p_0 = \int_0^z \rho g\, dz = \rho g (z - z_0)$$

Cette différence des pressions est donc égale au poids d'une colonne cylindrique de fluide de hauteur $z - z_0$ et dont la section droite a pour surface l'unité de surface.

On déduit de cette équation $\delta p = \delta p_0$: c'est le principe de Pascal : toute variation de pression se transmet intégralement, que nous retrouverons plus loin.

Cherchons la surface de séparation de deux fluides pesants non miscibles de densités différentes, ρ et ρ'.

Les relations précédentes s'écrivent

pour le premier liquide, $dp = \rho g\, dz$,

pour le second liquide, $dp' = \rho' g\, dz$;

à la surface de séparation, on a

$$p = p' \qquad \text{d'où} \qquad dp = dp',$$

et, par suite, $g(\rho - \rho')\,dz = 0$ ou $dz = 0$

La surface de séparation des deux fluides est donc un plan horizontal. Par exemple, la surface libre d'un liquide est horizontale, p est alors la pression atmosphérique. La surface de séparation de deux liquides pesants non miscibles est horizontale.

156 — <u>Equilibre relatif des fluides</u>. — Nous venons d'établir les conditions d'équilibre d'un fluide dans un système de Galilée ; si l'on prend comme système de comparaison un trièdre autre qu'un trièdre de Galilée, il faudra introduire la force d'inertie d'entraînement et la force d'inertie complémentaire. Dans le cas où l'on veut étudier l'équilibre relatif du système, il n'y a qu'à ajouter la force d'inertie d'entraînement.

Etudions, par exemple, l'équilibre relatif d'un liquide contenu dans un récipient qui tourne autour d'un axe vertical ascendant Oz, avec la vitesse angulaire constante ω (fig. 206). Chaque particule du liquide est en équilibre sous l'action de son poids $-mg$ et de la force d'inertie d'entraînement $m\omega^2 r$, r désignant la distance de cette particule à l'axe de rotation Oz. Le champ de forces dérive donc d'une fonction de forces

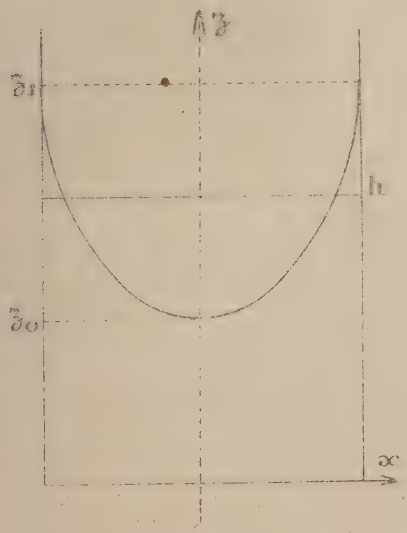

Fig. 206

$$U = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 - gz.$$

La relation $dp = \rho\, dU$ s'écrit donc

$$\frac{dp}{\rho} = d\left(\frac{1}{2}\omega^2 r^2 - gz\right).$$

d'où l'on tire :

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 - gz + c'$$

En particulier, à la surface libre du liquide, la pression p est égale à la pression atmosphérique p_0 et la relation précédente donne.

$$\frac{p_0}{\rho} = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 - gz + c'$$

ou

$$\frac{1}{2}\omega^2 r^2 - gz = c, \qquad (1)$$

en posant

$$p_0 = \rho\,(c + c')$$

L'équation (1) est l'équation de la surface libre du liquide ; c'est une surface de niveau particulière ; les surfaces de niveau sont de révolution autour de Oz.

La méridienne de la surface libre a pour équation

$$\omega^2 x^2 = 2(gz + c) ;$$

c'est une parabole d'axe Oz.

Déterminons la constante c en fonction des données de l'expérience. Soient a le rayon du récipient cylindrique, h la hauteur à laquelle s'élevait le liquide avant la rotation, z_0 la cote du sommet de la parabole, z_1 celle des points où elle rencontre les parois du récipient. Le volume du liquide $\pi a^2 h$. Quand le récipient tourne, la surface libre du liquide se creuse ; supposons que le fond du récipient ne se découvre pas et écrivons que le volume du liquide n'a pas changé. Le paraboloïde engendré par la rotation de la parabole et limité au plan de cote z_1 a pour volume

$$V_1 = \int_{z_0}^{z_1} \pi r^2\, dz ;$$

$$dz = \frac{1}{2g}\,\omega^2\, d(r^2) ;$$

d'où :

$$V_1 = \frac{\pi\omega^2}{2g}\int_0^{a^2} x^2\, d(x^2) = \frac{\pi\omega^2 a^4}{4g}$$

Nous aurons donc

$$\pi a^2 z_1 - \frac{\pi a^4 \omega^2}{4g} = \pi a^2 h ,$$

d'où

$$z_1 - \frac{a^2\omega^2}{4g} = h .$$

Mais en faisant $z = z_1$ dans l'équation de la parabole, il vient :

$$\frac{1}{2}\omega^2 a^2 - g z_1 = c \qquad (3)$$

Par conséquent

$$c = \frac{a^2\omega^2}{4} - gh \qquad (4)$$

Cherchons à quelle condition le fond du récipient ne se découvre pas ; il faut et il suffit que la cote z_0 du sommet du paraboloïde soit positive. On obtient la valeur de z_0 en faisant $r = 0$ dans l'équation du paraboloïde, ce qui donne :

$$-g z_0 = c \qquad (5)$$

On aura $z_0 \geqslant 0$, si $c \leqslant 0$, c'est-à-dire si :

$$\omega^2 \leqslant \frac{4gh}{a^2} .$$

Remarquons que les relations (3) et (5) donnent par addition

$$-g(z_0 + z_1) = 2c - \frac{a^2\omega^2}{2} ,$$

c'est-à-dire, d'après la relation (4)

$$-g(z_0 + z_1) = -2gh$$

d'où

$$\frac{z_0 + z_1}{2} = h .$$

Le liquide s'élève donc sur les bords d'une hauteur égale à celle dont il s'abaisse au centre.

Cherchons le rayon du cercle section du paraboloïde par le plan de cote h ; on a

$$\frac{1}{2}\omega^2 r^2 = gh + c = \frac{a^2\omega^2}{4},$$

d'où

$$r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

ce rayon est indépendant de la vitesse de rotation ω.

On pourra traiter, comme exercice, le cas où

$$\omega^2 > \frac{4gh}{a^2} ;$$

on trouve alors

$$C = a\omega(a\omega - 2\sqrt{gh}).$$

157 — Principe d'Archimède. — Considérons une portion de fluide en équilibre limitée par une surface (S) ; cette portion est en équilibre sous l'action des pressions normales du fluide qui l'entoure et des forces de masse à l'intérieur de (S) ; soit Σ le système des forces de masse.

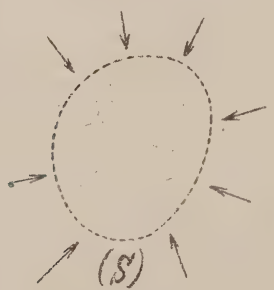

Fig. 207

L'ensemble des pressions s'exerçant sur (S) équilibre Σ et forme par conséquent un système équivalent au système $-\Sigma$.

Remplaçons la surface (S) de fluide par un corps solide de même forme, limité par la même surface géométrique (S), et admettons que cette substitution ne modifie pas la valeur des pressions en chaque point de (S). Nous obtenons ainsi le principe d'Archimède :

Quand un corps solide est plongé dans un fluide en

équilibre, le système des pressions s'exerçant sur le solide est équivalent au système opposé à celui des forces de masse qui agiraient sur le fluide mis à la place du solide.

Supposons en particulier que la pesanteur soit la seule force de masse : l'ensemble des pressions sur le solide admet alors une résultante unique directement opposée au poids du fluide qui remplacerait le solide.

Le résultat précédent subsiste si le corps solide est placé dans deux fluides différents ; le principe d'Archimède s'applique à chacune des deux parties. Cette extension suppose toutefois qu'on peut remplacer chaque partie du solide par le fluide correspondant sans troubler l'équilibre des deux fluides. Dans le cas où le fluide est en mouvement, il ne suffit pas, en général, d'ajouter les forces d'inertie aux forces de masse. Il faut encore être assuré que la substitution du solide au fluide n'apporte aucune perturbation au fluide environnant.

158 — Équilibre isotherme : Principe de Pascal. — Nous avons vu que, dans le cas général de l'équilibre, le champ de forces doit admettre un facteur intégrant. Si, la température demeure constante, l'équilibre est dit isotherme : dans ce cas, le champ de forces dérive d'une fonction de forces.

En effet, la température restant constante, la densité ne dépend que de la pression d'après l'équation caractéristique, soit $\rho = \varphi(p)$,

on a $$dp = \rho\, \delta\mathcal{T}$$

ou $$\frac{dp}{\varphi(p)} = \delta\mathcal{T}$$

ou, en posant $$U(p) = \int \frac{dp}{\varphi(p)},$$

$$\delta\mathcal{T} = dU(p).$$

Le travail élémentaire δT est donc une différentielle totale dU et on peut écrire :

$$dp = \rho\, dU.$$

Considérons en particulier un liquide incompressible : la densité ρ est alors constante et l'équation d'équilibre donne

$$p - p_0 = \rho\,(U - U_0)$$

Elle donne la pression p en tout point M quand on connaît la pression p_0 en un point particulier M_0.

Supposons qu'on fasse varier de δp_0 la pression p_0 en M_0 ; lorsque l'équilibre est établi de nouveau, la pression p en M aura varié de δp (fig. 208). Mais le second membre $\rho(U - U_0)$ de la relation précédente n'a pas varié, car il ne dépend que des coordonnées des points M_0 et M.

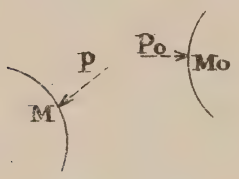

Fig. 208

On a par conséquent :

$$\delta p - \delta p_0 = 0 \quad \text{ou} \quad \delta p = \delta p_0$$

D'où le principe de Pascal :

Dans un liquide en équilibre isotherme, toute variation de pression sur un élément se transmet intégralement à chaque élément de ce liquide.

La presse hydraulique est une application importante de ce principe.

159 — Pressions sur une paroi plane. — Supposons encore que les forces de masse se réduisent à la pesanteur ; la fonction de force est alors :

$$U = gz$$

si l'axe Oz est dirigé suivant la verticale descendante et on a par suite, dans l'équilibre isotherme

$$p - p_0 = \rho\, g(z - z_0)$$

La différence des pressions unitaires en deux points de

cotes z et z_0 est égale au poids d'une colonne liquide de hauteur $z - z_0$ et dont la section droite a pour surface l'unité de surface.

Supposons le liquide placé dans un récipient ayant une paroi plane $X'X$ (fig. 209). La pression p_0 à la surface du liquide est la pression atmosphérique ; on peut écrire

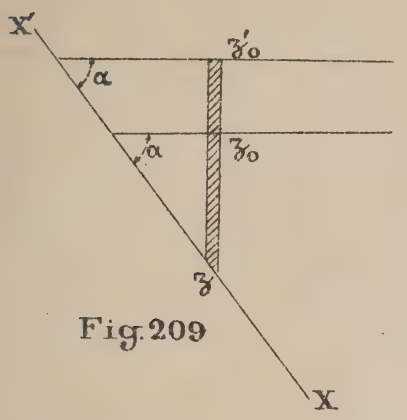

Fig. 209

$$p = p_0 + \rho g (z - z_0) = \rho g \left(z - z_0 + \frac{p_0}{\rho g}\right).$$

Posons

$$z'_0 = z_0 - \frac{p_0}{\rho g} \; ;$$

le plan de cote z'_0 s'appelle le <u>plan de charge</u>, et

$$p = \rho g (z - z'_0).$$

La pression dans le liquide est donc la même que si l'atmosphère était supprimée et le niveau du liquide remonté jusqu'au plan de charge ; nous pourrons supposer les cotes comptées à partir de ce plan de charge OH (fig. 210).

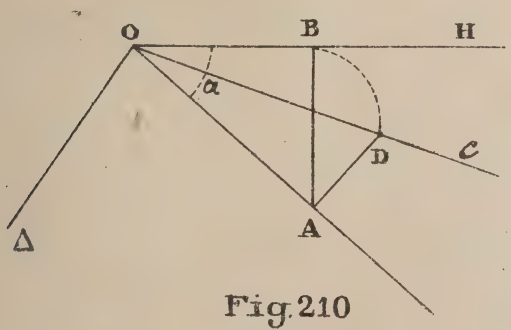

Fig. 210

Désignons par α l'angle du plan de charge et du plan horizontal. Soit A un point de la paroi, AB sa distance au plan de charge ; portons $AD = AB$ sur la normale en A à la paroi. On a :

$$\frac{AD}{OA} = \frac{AB}{OA} = \sin \alpha \; ;$$

la direction OC est donc fixe et tous les points D sont

dans un plan ΔOD, passant par l'intersection Δ de la paroi avec le plan de charge. On peut donc remplacer les colonnes verticales de liquide par des colonnes perpendiculaires à la paroi et dont les extrémités viennent s'aligner sur OD : ainsi la pression sur une portion (S) de la paroi sera égale au poids d'une colonne de liquide remplissant un cylindre ayant pour section droite cette portion de paroi et tronqué par le plan ΔOD.

Le centre de gravité de ce cylindre tronqué se projette sur la paroi en un point C, appelé centre de pression.

Remarquons que AD est proportionnel à AO; la force s'exerçant sur chaque élément de paroi est donc proportionnelle à la surface de cet élément et à la distance de cet élément à Δ.

Montrons alors que le centre des pressions C sur la surface (S) coïncide avec le centre de percussion du disque (S) tournant autour de Δ.

Nous devons en effet chercher la condition pour qu'il n'y ait pas de percussions de liaisons sur l'axe de rotation Δ : la variation des quantités de mouvement sera alors équivalente à une percussion unique P appliquée en un point C_1, centre de percussion (fig. 211). Mais, dans la rotation de la plaque autour de Δ, la quantité de mouvement de chaque élément A est proportionnelle à l'aire de cet élément et à sa distance à (Δ). Il en est de même pour la variation de cette quantité de mouvement.

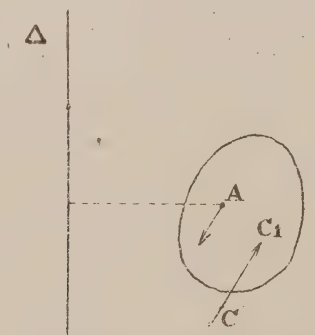

Fig. 211

Le point C_1 est donc le point d'application de la résultante de forces perpendiculaires au disque $\Rightarrow$,

proportionnelles à l'aire de l'élément auquel elles s'appliquent et à la distance de cet élément à (Δ). La définition du point C_1 est donc la même que celle du centre des pressions C ; ces deux points coïncident.

Nous allons déterminer le centre des pressions en suivant une voie différente de celle qui nous a conduit à la détermination du centre des percussions.

Soit G le centre de gravité du disque (S) ; prenons un axe Gy parallèle à Δ et un axe Gx conjugué de Gy par rapport à l'ellipse centrale d'inertie du disque. Soit x_0 l'abscisse de Δ (fig. 212).

La force agissant sur un élément M d'aire ω est proportionnelle à ω et à sa distance MH à Δ ; elle est donc proportionnelle à $\omega(x-x_0)$. On a,

$$\Sigma\omega(x-x_0) = \Sigma\omega x - x_0\Sigma\omega = -\Omega x_0 .$$

car $\Sigma\omega x = 0$, puisque l'origine est le centre de gravité, et $\Sigma\omega = \Omega$, aire totale.

Soient x_1, y_1 les coordonnées du point d'application de la résultante $-\Omega x_0$; nous déterminerons x_1, y_1 en écrivant que le moment de cette résultante par rapport à G est égal à la somme des moments de toutes les forces $\omega(x-x_0)$, ce qui donne en supposant successivement les forces parallèles à Gx, puis à Gy

$$\Sigma\omega(x-x_0)\,y = -\Omega x_0 y_1,$$
$$\Sigma\omega(x-x_0)\,x = -\Omega x_0 x_1,$$

Mais, l'origine étant le centre de gravité, on a $\Sigma\omega x = 0$, $\Sigma\omega y = 0$; d'autre part, les axes Gx et Gy étant conjugués par rapport à l'ellipse centrale d'inertie, $\Sigma\omega xy = 0$.

Alors, les équations précédentes donnent

$$y_1 = 0$$
$$\Sigma\omega x^2 = -\Omega x_0 x_1 .$$

Le point C est donc sur Gx.

Soit δ la distance du point M à Gy (fig. 212) ;

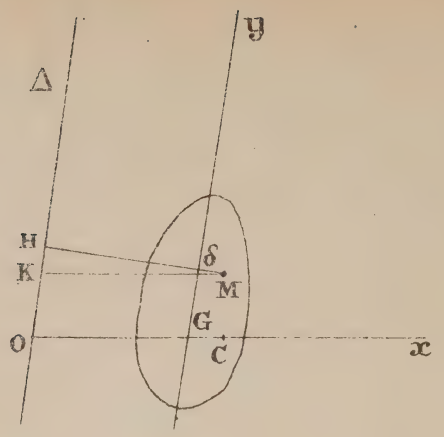

Fig. 212

On a $\delta = x \sin\theta$

et par suite,

$$\Sigma \omega x^2 = \frac{\Sigma \omega \delta^2}{\sin^2\theta}$$

Or, k étant le rayon de giration du disque autour de Gy, $\Sigma \omega \delta^2 = \Omega k^2$; il vient alors

$$-\Omega x_0 x_1 = \frac{\Omega k^2}{\sin^2\theta};$$

ou

$$x_0 x_1 = -\frac{k^2}{\sin^2\theta}$$

Le point C et la droite Δ sont donc situés de part et d'autre de Gy. Il est aisé de voir que la formule précédente est équivalente à celle qui a été obtenue dans la théorie des percussions.

160 – <u>Corps flottants</u>. — Nous supposerons que le corps est fermé, ou que dans son mouvement, il n'embarque pas de liquide. Soient V le volume de la partie immergée, V' le volume de la partie dans l'air, ϖ et ϖ' les poids spécifiques du liquide et de l'air.

Les pressions qui s'exercent sur la partie immergée ont une résultante égale à ϖV et appliquée au centre de gravité géométrique c de la partie immergée (fig. 213); de même, les pressions qui s'exercent sur la partie dans l'air ont une résultante $\varpi' V'$ appliquée en C' centre de gravité géométrique de cette partie. La force qui s'exerce en c peut s'écrire :

$$\varpi V = \varpi' V + (\varpi - \varpi') V$$

les forces $\varpi' V$ et $\varpi' V'$ appliquées en C et C' ont une résultante $\varpi'(V+V')$ appliquée au centre de gravité G_1 du corps flottant. Les forces qui agissent sur le

corps flottant sont donc :

en G_1 , . . . $P - \varpi'(V + V')$;

en C , . . . $(\varpi - \varpi')V$

On pourra donc négliger la poussée de l'air, à condition de supposer que le poids du corps dans le vide a été remplacé par le poids du corps dans l'air, et que le poids spécifique du liquide est remplacé par le poids spécifique du liquide dans l'air. Nous désignerons les forces en G_1 et C par P et ϖV, et, pour que le corps flottant soit en équilibre sous l'action de ces deux forces il faut qu'elles soient directement opposées, c'est-à-dire que les deux points G_1 et C soient sur la même verticale, et que l'on ait $P = \varpi V$.

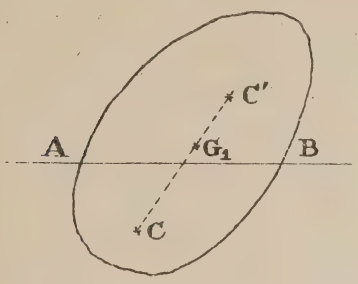

Fig. 213

Cette relation montre que le volume V de la partie immergée conserve la valeur constante $\frac{P}{\varpi}$; le plan horizontal AB, ou plan de flottaison, découpe dans le corps un volume constant V ; les plans AB dépendent donc de deux paramètres, ils enveloppent une certaine surface, appelée surface de flottaison. Soit G le point de contact du plan AB avec cette surface.

Le centre de gravité C de la partie immergée s'appelle centre de carène ou centre de poussée ; le lieu de ce point est la surface des centres de carène.

161 — Théorèmes de Dupin. — 1°. Le point de contact du plan de flottaison avec la surface de flottaison, est le centre de gravité de la section du corps flottant par le plan de flottaison.

Désignons par (π) un plan de flottaison AB, par (π') un plan de flottaison $A'B'$ voisin. Ces deux plans se coupent suivant une droite Δ dont la position limite, lorsque (π') tend vers (π), passe par le point de contact du plan (π) avec son enveloppe, c'est-à-dire par le point G (fig. 214).

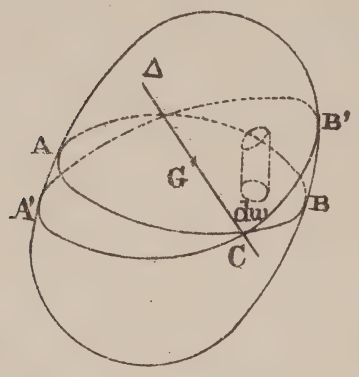

Fig. 214

Les plans de flottaison découpent dans le corps des volumes égaux, les volumes des onglets ACA' et BCB' sont égaux. Choisissons un axe Oz perpendiculaire au plan (π) et soit $d\omega$ l'élément d'aire dans le plan (π). Le volume d'un filet cylindrique perpendiculaire au plan AB est $z\,d\omega$; l'intégrale $\iint z\,d\omega$ étendue à tout le plan (π) doit donc être nulle. Or, l'équation du plan (π') est de la forme

$$z = ax + by + c$$

L'équation

$$\iint z\,d\omega = 0$$

s'écrit donc

$$a\iint x\,d\omega + b\iint y\,d\omega + c\iint d\omega = 0\,.$$

Les coordonnées $\xi, \eta, 0$ du centre de gravité de la section de la surface par le plan AB sont données par les équations

$$\iint x\,d\omega = \Omega\xi\,,\quad \iint y\,d\omega = \Omega\eta\,,\quad \iint d\omega = \Omega$$

On a, par suite,

$$a\xi + b\eta + c = 0\,.$$

Le centre de gravité de la section du corps flottant par un plan (π) est donc sur la droite d'intersection (Δ)

de : π) et d'un plan infiniment voisin (π'), quel que soit (π') ; ce centre de gravité coïncide donc avec le point de contact G du plan π avec son enveloppe.

La droite (Δ) s'appelle axe d'inclinaison dans le passage de la flottaison (π) à la flottaison (π').

2°.- <u>La surface des centres de carène est convexe et son plan tangent est parallèle au plan de flottaison</u>. —

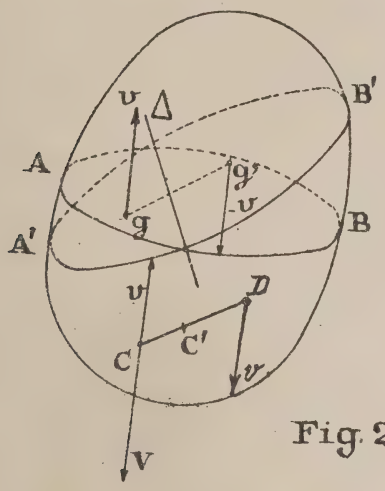

Fig. 215

Soient g et g' les centres de gravité des onglets AA'Δ et BB'Δ de volume v, C, le centre de carène correspondant à AB (fig. 215). Pour avoir le centre de carène C' correspondant à A'B', il faut composer les forces verticales V, v, − v appliquées respectivement en C, g, g' : on peut transporter le couple (v, − v) en C et D, CD étant un vecteur égal à gg' et on remplace les forces V + v et − v appliquées en C et D, par leur résultante V appliquée au nouveau centre de poussée C' situé sur CD.

La droite CC' reste constamment parallèle à gg' ; mais lorsque (π') tend vers (π), les points g et g' tendent tous deux vers des points du plan (π) ou (AB) ; la droite gg' devient une droite de ce plan, et la droite CC' tend vers une position limite parallèle au plan (AB) ; or, cette position limite est une tangente en C à la surface des centres de carène et, comme cela a lieu quel que soit le plan (π') considéré, c'est-à-dire quelle que soit la droite CC', on en déduit que le plan tangent en C à la surface de carène est

parallèle au plan de flottaison (AB).

Les points g et g' étant situés respectivement au-dessous et au-dessus du plan de flottaison (AB), la droite gg' monte par rapport à π supposé horizontal ; il en est de même de la droite CC', quel que soit C', et par suite la surface des centres de carène est convexe en C, et par suite en tout point.

La droite CC' a une position limite CT' située dans le plan tangent ; CT et Δ sont des directions conjuguées de la surface des centres de carène en C : en effet, la droite d'intersection des plans tangents à cette surface en C et C' a pour position limite la droite conjuguée de la droite limite de CC'.

162 — Équilibre du corps flottant. — Lorsque le corps flottant est en équilibre, son centre de gravité G est sur la verticale du centre de carène correspondant C ; la droite GC est donc normale en C à la surface des centres de carène, puisque le plan tangent en C à cette surface est parallèle au plan de flottaison. Nous obtiendrons donc les positions d'équilibre en menant du point G les normales à la surface des centres de carène (fig. 216), cette surface est fermée, car elle admet toujours deux plans tangents parallèles à une direction donnée : à chacune des demi-droites issues de G et perpendiculaires à cette direction de plan correspond en effet un plan de flottaison comme on le voit par continuité en déplaçant un plan parallèlement à lui-même.

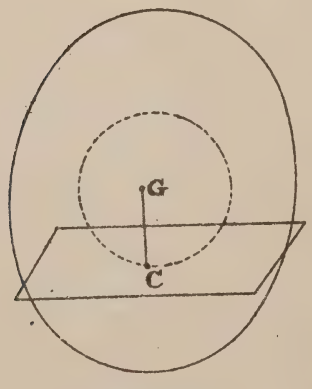

Fig. 216.

163 — **Théorème de Reech.** — *Le nombre des normales issues d'un point G à une surface fermée est toujours pair.*

Nous supposerons que le point G est intérieur à la surface : s'il n'en était pas ainsi, nous remplacerions la surface par une surface parallèle contenant G à son intérieur. Les normales seraient les mêmes.

Supposons que cette surface soit plongée tout entière dans une sphère pleine d'eau de centre G et que cette eau s'évapore régulièrement de façon que le rayon de la sphère diminue progressivement. Il arrivera un moment où cette sphère sera tangente à la surface : il apparaîtra ensuite autour du point de contact un îlot : de tels points correspondent aux *normales maxima*. Puis, le rayon de la sphère diminuant toujours, deux îlots viennent se rejoindre, et former un continent : ces points de réunion correspondent aux *normales mixtes*. Enfin les mers intérieures qui subsistaient entre ces continents disparaissent et les points d'assèchement correspondent aux *normales minima*. Finalement la sphère est tout entière à l'intérieur de la surface et toute la terre est apparue.

Par suite, quand on rencontre :

une normale maxima, il apparaît 1 terre ;
une normale mixte, il disparaît 1 terre ;
une normale minima, il disparaît 1 mer.

La somme du nombre de normales rencontrées N et du nombre de terres T et de mers M est donc un nombre qui conserve une parité constante. Soit p le nombre de normales menées du point G à la surface. Au début, on a $N = 0$, $T = 0$, $M = 1$, et à la fin $N = p$, $T = 1$, $M = 0$. Les nombres 1 et $p + 1$ ont donc la même parité ; donc p est pair.

164 — **Stabilité de l'équilibre.** — *On démontre que le principe des travaux virtuels s'étend à un système composé de solides et de liquides parfaits.* Dans le cas d'un corps flottant dans un bassin, il faut donc que la somme des travaux des forces directement appliquées au flotteur et au liquide, c'est-à-dire ici, de la pesanteur,

soit nulle ; le centre de gravité du système doit donc être placé le plus bas possible.

Désignons par G le centre de gravité du solide de poids P, par G' le centre de gravité du liquide de poids P' ; le centre de gravité G_1 du système entier est sur GG' et tel que

$$\frac{G_1G}{G_1G'} = \frac{P'}{P}$$

Le centre de poussée C est le centre de gravité du volume d'eau égal au volume immergé du corps ; le poids de ce volume d'eau est égal à la poussée, c'est-à-dire au poids P du corps.

Composons les forces P et P' appliquées en C et G' (fig. 217) ; leur résultante $P+P'$ est appliquée en un point O de CG' tel que :

$$\frac{OC}{OG'} = \frac{P'}{P}$$

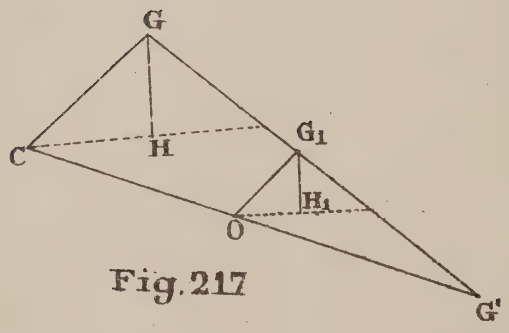

Fig. 217

Les droites CG' et OG_1 sont donc parallèles.

D'autre part, le point O est fixe, car, le volume immergé étant constant, le volume limité dans le bassin par le plan de flottaison est constant et O est le centre de gravité de ce volume.

Il y aura donc équilibre stable quand la distance G_1H_1 de G_1 au plan horizontal fixe de O sera minima. Mais on a :

$$\frac{CG}{OG_1} = \frac{GG'}{G_1G'} = \frac{P+P'}{P} ;$$

le minimum de G_1H_1 correspond donc au minimum de GH.

Nous sommes donc ramenés à chercher le minimum de la distance de G au plan tangent en C à la surface des centres de carène, c'est-à-dire les positions d'équilibre stable d'un corps reposant par la surface (Σ) des centres de carène C, supposée solide, sur un plan horizontal.

La droite GC (fig. 218) doit donc être normale en C

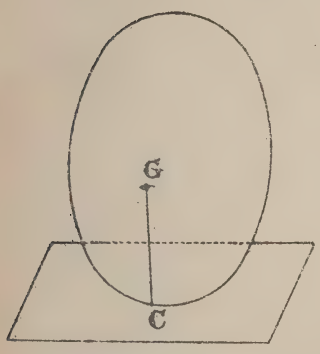

Fig. 218

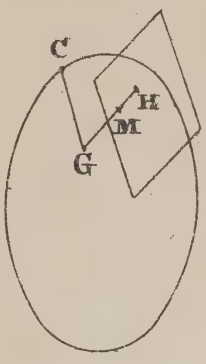

Fig. 219

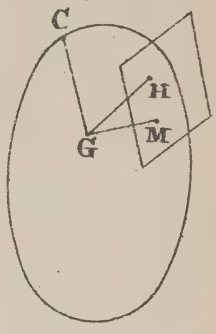

Fig. 220

à cette surface, car le poids du corps et la réaction en C du plan horizontal sur la surface (Σ) doivent être opposées ; de plus, la distance GC de G au plan tangent en C à (Σ) doit être minima par rapport aux distances GH de G aux plans tangents voisins du plan tangent en C.

Mais, quand une surface (Σ) est convexe, le minimum de la distance GH de G aux plans tangents à la surface correspond au minimum de la distance GM de G aux points M de la surface, c'est-à-dire à la normale minima menée de G à la surface.

Considérons en effet une normale GC et supposons que la distance GC soit minima pour les distances GM de G aux points M entourant C ; montrons que GC est aussi un minimum pour les distances GH. Soit GH la distance de G à un plan tangent quelconque (fig. 219) ; la demi-droite GH rencontre la surface en M, avant de

rencontrer le plan tangent, car la surface est supposée convexe ; donc

$$GM < GH$$

et, comme $GC < GM$, on a bien :

$$GC < GH.$$

Réciproquement, supposons que la normale GC soit minima pour les distances GH ; montrons qu'elle est minima pour les distances GM.

Soit (fig. 220) GH la distance de G au plan tangent en M ; on a :

$$GH \leqq GM.$$

Si l'on avait $GM < GC$, on aurait :

$$GH < GC,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. On a donc bien

$$GC < GM.$$

Or, la surface des centres de carène est convexe ; nous sommes donc ramenés à mener par G les normales minima à la surface des centres de carène.

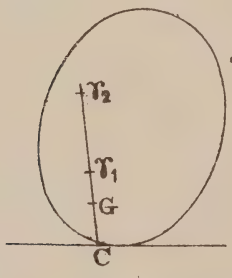

Fig. 221

Soient γ_1 et γ_2 les centres de courbure principaux de cette surface en C (fig. 221). La normale GC sera maxima si G est situé au-dessus du centre de courbure le plus éloigné γ_2 ; GC ne sera ni maxima ni minima si G est entre γ_1 et γ_2 ; enfin GC sera minima si G est au-dessous du centre de courbure le plus rapproché γ_1.

γ_2 et γ_1 sont respectivement le grand et le petit métacentre. Il y aura équilibre stable si GC est normal à la surface (Σ) et si G est au-dessous du petit métacentre. En se reportant à la démonstration du

théorème de Reech, on voit qu'il y a toujours au moins une normale maxima et une normale minima; il y a donc toujours au moins une position d'équilibre instable et une position d'équilibre stable.

Chapitre IX

Notions d'Hydrodynamique.

165 — **Équations du mouvement.** — En appelant ρ la densité du fluide au point $M(x, y, z)$; X, Y, Z les projections de la force appliquée en ce point et J_x, J_y, J_z les composantes de l'accélération, nous avons établi au paragraphe 155, les équations du mouvement :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X - J_x\,, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = Y - J_y\,, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = Z - J_z\,.$$

On peut mettre ces équations sous des formes différentes suivant le choix des variables indépendantes.

166 — **Variables de Lagrange.** — Considérons les positions (E_0) et (E) de la masse fluide aux instants t_0 et t (fig. 222). La molécule M de coordonnées x, y, z occupait à l'instant initial la position M_0 de coordonnées a, b, c. Cet élément décrit une trajectoire ou filet fluide. Le mouvement du fluide sera défini si

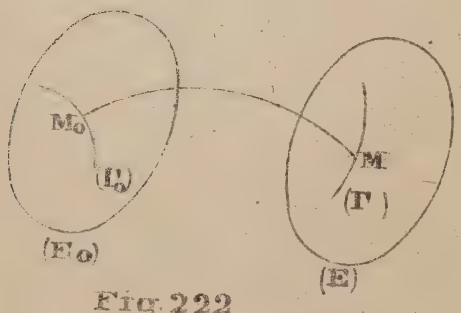

Fig 222

on connaît les expressions x, y, z en fonction de a, b, c et du temps t. Ces quatre variables indépendantes sont appelées les variables de Lagrange. Soient

$$(1) \qquad x = f(a,b,c,t), \quad y = g(a,b,c,t), \quad z = h(a,b,c,t),$$

ces expressions ; nous supposerons que les fonctions sont uniformes et continues, et qu'on puisse résoudre les équations (1) par rapport à a, b, c, c'est-à-dire que le déterminant fonctionnel $\frac{D(x,y,z)}{D(a,b,c)}$ ne soit pas nul.

Voici des conséquences simples de la continuité des fonctions f, g, h.

Si l'on considère dans la masse E_0 une courbe (Γ_0), les différents points de cette courbe seront à l'instant t sur une courbe (Γ). En effet, on peut exprimer les coordonnées d'un point de (Γ_0) en fonction d'un paramètre u,

$$a = \varphi(u), \quad b = \psi(u), \quad c = \chi(u),$$

de façon que l'on obtienne toute la courbe (Γ_0) en faisant varier u de α à β. D'après les formules (1) où t garde une valeur fixe, le point de coordonnées x, y, z décrit, quand u varie dans l'intervalle (α, β) une courbe continue (Γ).

Si (Γ_0) est fermée, (Γ) l'est aussi, car si pour $u=\alpha$ et $u=\beta$ on obtient le même point de (Γ_0), on obtiendra le même point de (Γ) pour ces deux valeurs de u. En prenant pour a, b, c des fonctions continues de deux paramètres u et v, on verrait de même qu'à une surface (Σ_0) de (E_0), correspond dans (E), une surface (Σ) ; que si (Σ_0) est fermée, (Σ) l'est aussi. Dans ce cas, à l'intérieur de (Σ_0) correspond l'intérieur de (Σ). Considérons (fig. 223), en effet, un point $A_0(a,b,c)$ intérieur à (Σ_0) et un point $P_0(a',b',c')$ situé sur Σ_0 ; à l'instant t, ces points sont en $A(x,y,z)$ et $P(x',y',z')$; le point P étant situé sur (Σ).

$$\overrightarrow{AP}^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2,$$

est une fonction continue des paramètres u, v, définissant la position du point (P_0) sur la surface (Σ_0), et du temps t.

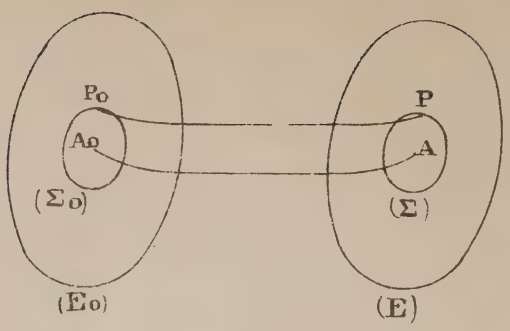

Fig. 223

Cette fonction passe un minimum lorsque le temps varie de 0 à t, et le point (u,v) parcourt (Σ_0) ; or, comme la distance AP ne peut jamais être nulle, les positions initiales A_0 et P_0 étant distinctes, il en résulte que ce minimum est un nombre positif ε. A aucun moment, le point A ne s'approche donc de la surface (Σ) de moins de ε. Il ne peut donc en sortir, et à l'intérieur de (Σ_0) correspond bien l'intérieur de (Σ). Les molécules à l'intérieur de (Σ_0) restent à l'intérieur de (Σ) donc la surface se déforme comme un sac renfermant toujours les mêmes molécules. Ceci s'applique en particulier à la surface limitant toute la masse fluide.

Equations du mouvement. — Les équations du mouvement sont

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = Y - \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = Z - \frac{d^2z}{dt^2},$$

avec $$J_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad J_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad J_z = \frac{d^2z}{d^2t}.$$

Dans ces formules, p et ρ sont supposés exprimés en fonction de x, y, z, t. Si l'on veut mettre en évidence les variables de Lagrange, il suffit de remarquer que p et ρ sont des fonctions de a, b, c, t par l'intermédiaire de x, y, z. On a donc, en particulier pour p,

$$\frac{\partial p}{\partial a} = \frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial a},$$

$$\frac{\partial p}{\partial b} = \frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial p}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial b},$$

$$\frac{\partial p}{\partial c} = \frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial p}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial c}.$$

Il en résulte, en multipliant par $\frac{1}{\rho}$ et en remplaçant $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial p}{\partial z}$ par leurs expressions tirées des équations du mouvement.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial a} = \left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{\partial x}{\partial a} + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{\partial y}{\partial a} + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\frac{\partial z}{\partial a},$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial b} = \left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{\partial x}{\partial b} + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{\partial y}{\partial b} + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\frac{\partial z}{\partial b},$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial c} = \left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{\partial x}{\partial c} + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{\partial y}{\partial c} + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\frac{\partial z}{\partial c}.$$

On a ainsi un système de trois équations aux dérivées partielles pour déterminer cinq fonctions inconnues x, y, z, p et ρ des quatre variables a, b, c, t.

On complète ce système par deux équations qui sont l'équation de continuité et l'équation caractéristique.

7 — <u>Equation de continuité</u>. — L'équation de continuité exprime que la masse comprise à l'intérieur d'une surface (Σ_0) est la même que celle intérieure à (Σ), transformée de (Σ_0).

On a en effet

$$\iiint_{(\Sigma)} \rho\, dx\, dy\, dz = \iiint_{(\Sigma_0)} \rho_0\, da\, db\, dc.$$

Or, le déterminant fonctionnel $\frac{D(x,y,z)}{D(a,b,c)} = D$ qui ne s'annule jamais est pour $t = t_0$ égal à l'unité. Il en résulte qu'il est toujours positif. La formule du changement de variables permet d'écrire

$$\iiint_{(\Sigma)} \rho\, dx\, dy\, dz = \iiint_{(\Sigma_0)} \rho \frac{D(x,y,z)}{D(a,b,c)}\, da\, db\, dc.$$

On a donc, quelle que soit (Σ_0),

$$\iiint_{(\Sigma_0)} \rho \frac{D(x,y,z)}{D(a,b,c)}\, da, db, dc = \iiint_{(\Sigma_0)} \rho_0\, da\, db\, dc,$$

ou $$\iiint_{(\Sigma_0)} (\rho D - \rho_0)\, dt = 0,$$

donc, $$\rho D = \rho_0$$

C'est l'équation de continuité que l'on peut écrire

$$(2) \qquad \rho \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = \rho_0$$

En lui adjoignant l'équation caractéristique du fluide $F(p, \rho, \theta) = 0$, on a un système de cinq équations aux dérivées partielles pour définir les six fonctions x, y, z, p, ρ, θ des variables a, b, c, t.

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial a} = \left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{\partial x}{\partial a} + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{\partial y}{\partial a} + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\frac{\partial z}{\partial a}, \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial b} = \left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{\partial x}{\partial b} + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{\partial y}{\partial b} + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\frac{\partial z}{\partial b}, \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial c} = \left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{\partial x}{\partial c} + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{\partial y}{\partial c} + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\frac{\partial z}{\partial c}, \\ \rho \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = \rho_0, \\ F(p, \rho, \theta) = 0. \end{cases}$$

Pour déterminer ces fonctions, il faudra introduire une hypothèse supplémentaire. Par exemple, on pourra supposer que :

1° Le fluide reste à température constante — $\theta = C^{te}$.

En particulier, si le fluide est un liquide incompressible, on a aussi $\rho = C^{te}$.

2°. - Le fluide est un gaz subissant une transformation adiabatique. - Dans ces conditions, il existe entre la pression et la densité la relation

$$p = k\rho^{\gamma},$$

k et γ étant deux constantes numériques.

168 - Conditions initiales et conditions aux limites.

Pour intégrer le système (3), il faut trouver des fonctions x, y, z, p, ρ, θ des variables a, b, c, t qui vérifient ces équations et satisfassent aux conditions imposées par la nature du problème. Il faudra tenir compte de deux sortes de conditions. Les conditions initiales relatives à l'état du fluide au début et les conditions aux limites qui doivent être vérifiées pendant tout le cours du mouvement.

Les conditions initiales sont les positions (a, b, c) et les vitesses (u_0, v_0, w_0) de chaque point du fluide à l'instant initial $t = 0$, ainsi que les valeurs p_0 et ρ_0 de p et ρ en chacun de ces points.

Examinons quelques types de conditions aux limites. On peut supposer que le fluide est assujetti à rester dans un récipient ou à glisser dans un tube limité par une surface fixe $f(x, y, z) = 0$. Cette équation doit être vérifiée quel que soit t quand on y remplace x, y, z par f, g, h, en supposant que le point a, b, c soit sur (Σ_0).

On aura donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} = 0,$$

en tout point (a, b, c) situé sur la surface (Σ_0) ou sur une partie de (Σ_0).

Réciproquement, si cette relation est vérifiée, $f(x, y, z) = C^{te} = f(a, b, c) = 0$.

Il peut arriver que la paroi se déplace ou se déforme avec le temps. L'équation de la surface limite sera alors

$$F(x, y, z, t) = 0$$

Cette équation doit être vérifiée quel que soit t lorsqu'on remplace x, y, z par les fonctions f, g, h dans lesquelles le point a, b, c est sur (Σ_0).

Il faudra donc que l'on ait

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}+\frac{\partial F}{\partial t}=0$$

pour tous les éléments liquides tels que $F'(x,y,z,t)=0$.

169 — **Variables d'Euler.** — Considérons un point P intérieur au fluide. A chaque instant une molécule passe par ce point ; elle est animée d'une vitesse $\vec{W}$, fonction du temps. La connaissance des vecteurs $\vec{W}$ aux différents points du fluide à chaque instant t suffit à caractériser le mouvement. Les composantes

$$u(x,y,z,t)\ ,\quad v(x,y,z,t)\ ,\quad w(x,y,z,t),$$

du vecteur $\vec{W}$ et le temps t sont appelées les variables d'Euler. Connaissant les fonctions u, v, w, on obtiendra les équations des filets fluides en intégrant le système différentiel

$$\frac{dx}{dt}=u(x,y,z,t)\ ,$$

$$\frac{dy}{dt}=v(x,y,z,t)\ ,$$

$$\frac{dz}{dt}=w(x,y,z,t)\ ,$$

et en déterminant les fonctions x, y, z qui pour $t=t_0$ se réduisent à a, b, c.

Pour écrire les équations de l'hydrodynamique au moyen des variables d'Euler, remarquons que, de

$$\frac{dx}{dt}=u(x,y,z,t),$$

résulte

$$\frac{d^2x}{dt^2}=u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}\ .$$

Les trois premières équations du mouvement peuvent donc s'écrire

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Transformons maintenant l'équation de continuité.

En prenant les dérivées logarithmiques des deux membres de l'équation

$$\rho \cdot D = \rho_0,$$

on a, à chaque instant t,

$$\frac{1}{D}\frac{dD}{dt} + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Prenons la dérivée par rapport à t, de

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix},$$

Cette dérivée est la somme de trois déterminants dont le premier s'obtient en remplaçant les éléments de la première ligne de D par leurs dérivées

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right) = \frac{\partial u}{\partial a}\ ;\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial b}\right) = \frac{\partial v}{\partial b}\ ;\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial c}\right) = \frac{\partial u}{\partial c}$$

Et, comme

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a},$$

$$\frac{\partial u}{\partial b} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial b},$$

$$\frac{\partial u}{\partial c} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial c},$$

ce déterminant est la somme de trois déterminants dont le premier seul n'est pas nul et a pour valeur

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot D$$

On a donc

$$\frac{1}{D}\frac{dD}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div. } \vec{W}.$$

L'équation de continuité devient donc

$$\text{div. } \vec{W} + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Comme on a

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial \rho}{\partial y} \cdot v + \frac{\partial \rho}{\partial z} \cdot w + \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

l'équation de continuité s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x}\right) + \left(\rho \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial y}\right) + \left(\rho \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial \rho}{\partial z}\right) = 0,$$

ou bien

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0.$$

Les quatre équations de l'hydrodynamique s'écrivent donc avec les variables d'Euler sous la forme suivante :

$$(4)\quad \begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} &= X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} &= Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} &= Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

<u>Interprétation de la divergence dans un champ de vitesses.</u> -

Considérons un élément (Σ_0) de volume τ_0 à l'instant initial. Il lui correspond à l'instant t un élément (Σ) dont le volume est $\tau_0 + \Delta\tau_0$, on a

$$\tau_0 + \Delta\tau_0 = \iiint_{(\Sigma)} dx\,dy\,dz = \iiint_{(\Sigma_0)} D\,da\,db\,dc,$$

et, d'après le théorème de la moyenne,

$$\iiint_{(\Sigma_0)} D\,da\,db\,dc = \tau_0 D_1,$$

D_1 étant la valeur de D en un point déterminé de τ_0.

On a donc

$$\Delta\tau_0 = \tau_0 (D_1 - 1) = \tau_0 \Delta D_1,$$

puisque D_1 est égal à 1 lorsque $t = t_0$.

$$\frac{\Delta\tau_0}{\tau_0 \Delta t} = \frac{\Delta D_1}{\Delta t},$$

et, en passant à la limite,

$$\frac{1}{\tau_0}\,\frac{d\tau_0}{dt} = \frac{\Delta D_1}{\Delta t} = \text{div. } \overrightarrow{W},$$

en supposant que les fonctions et leurs dérivées soient continues. $\overrightarrow{W}$ est relatif à un point de τ_0.

$\frac{1}{\tau_0}\,\frac{d\tau_0}{dt}$ est le coefficient de dilatation cubique, si on fait tendre τ_0 vers zéro autour d'un point A du fluide. On a ainsi une interprétation de la divergence du vecteur $\overrightarrow{W}$ au point A ; c'est le coefficient de dilatation cubique à l'instant t_0 et au point A.

170 — <u>Régime permanent</u>. <u>Théorème de Bernoulli</u>.-

On dit que le mouvement d'un fluide constitue un régime permanent lorsque, en chaque point, le vecteur vitesse $\overrightarrow{W}$ est indépendant du temps, les molécules se déplacent alors de façon qu'en chaque point de l'espace, la vitesse est la même, quelle que soit la molécule qui passe par ce point.

Les filets fluides s'obtiennent par l'intégration des équations

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad ;$$

Supposons que le champ de forces X, Y, Z dépende d'une fonction de forces $U(x,y,z)$, et que la densité ρ soit fonction de la pression seulement, $\rho = \varphi(p)$; en posant

$$P = \int \frac{dp}{\rho} = \int \frac{dp}{\varphi(p)} \quad , \quad U - P = Q \, ,$$

les équations de l'hydrodynamique s'écrivent, dans le cas du régime permanent où $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$;

$$(5) \quad \begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial Q}{\partial x} \, , \\ u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{\partial Q}{\partial y} \, , \\ u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial Q}{\partial z} \end{aligned}$$

En employant les variables de Lagrange, ces équations deviennent

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} \, , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial Q}{\partial y} \, , \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial Q}{\partial z} \, .$$

Le point qui décrit un filet fluide se meut donc comme un point matériel soumis à une force de composantes $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial z}$. Le théorème de la force vive montre que

$$\frac{1}{2} W^2 - Q = C \, ,$$

la constante C dépend d'ailleurs du filet fluide considéré. On obtient ainsi le <u>théorème de Bernoulli</u> :

<u>Dans le régime permanent, si la densité ne dépend que de la pression, et si les forces extérieures dérivent d'une fonction de forces, l'expression $\frac{1}{2} W^2 - Q$ est constante le long d'un filet fluide.</u>

Cette constante change quand on passe d'un filet à un autre.

Cas particulier. — Dans le cas d'un liquide à température constante, ρ est constant, $P = \frac{p}{\rho}$; donc

$$\frac{1}{2} W^2 + \frac{p}{\rho} - U = C ;$$

ou

$$\frac{p}{\rho} = U + C - \frac{1}{2} W^2 .$$

Comme p doit être toujours positif, on a

$$W^2 < 2(U + C),$$

il existe donc pour chaque filet fluide une limite supérieure de la grandeur de la vitesse ; si cette limite était dépassée, les particules se sépareraient.

171 — Théorème de Torricelli. — Appliquons les résultats précédents au cas d'un liquide placé dans un réservoir de grande surface, dont le niveau est maintenu constant et s'écoulant par un petit orifice percé dans une paroi (fig. 224). L'expérience montre qu'il s'établit un régime permanent et les molécules qui sont à la surface finissent par s'écouler par l'orifice, de sorte que les filets fluides partent de la surface libre pour arriver à l'orifice.

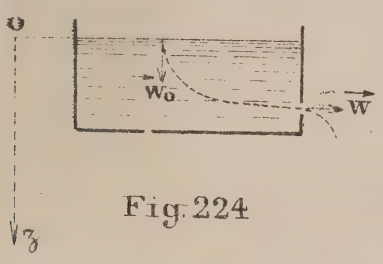

Fig. 224

Prenons comme plan des xy le plan de la surface libre, pour axe des z la verticale descendante, la fonction des forces est $U = gz$ et le théorème de Bernoulli donne

$$\frac{1}{2} W^2 + \frac{p}{\rho} gz = C,$$

le long d'un filet fluide. Pour déterminer la constante C, il suffit de connaître W, p, z, en un point du filet fluide.

Sur la surface on a $z = 0$, $p = p_0$, p_0 étant la pression atmosphérique, $W = W_0$. Cette vitesse W_0 est négligeable si l'aire de la surface libre est très grande par rapport à celle de l'orifice, car si on supprimait l'alimentation qui maintient le niveau constant, ce niveau baisserait très lentement.

On a donc :

$$\frac{1}{2} W^2 + \frac{p}{\rho} - gz = \frac{p_0}{\rho} \ ;$$

Si h est la cote de l'orifice, w la vitesse d'écoulement par l'orifice, la valeur de la pression p à l'orifice étant égale à p_0 puisque l'écoulement se fait à l'air libre, on a

$$\frac{1}{2} W^2 = gh \quad , \quad W = \sqrt{2gh} \ .$$

Cette formule exprime le théorème de Torricelli :
La vitesse d'écoulement est la vitesse qu'aurait un point pesant abandonné dans le vide à une hauteur h au-dessus de l'orifice.

172 — Equations d'Helmholtz. — Désignons par ξ, η, ζ les demi-composantes du tourbillon $\vec{T}$ du vecteur vitesse $\vec{W}$. On a :

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) ,$$

$$\eta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) ,$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) .$$

Si le tourbillon est nul en chaque point, nous savons qu'il existe un potentiel des vitesses. Si le vecteur $\vec{T}$ est, en chaque point, perpendiculaire à $\vec{W}$, le champ de vitesses possède un facteur intégrant.

Stokes a donné, pour un tourbillon, l'interprétation

mécanique suivante. Soit P un point à l'intérieur du fluide. Considérons une petite sphère entourant ce point à l'instant t et effectuons les deux opérations suivantes. Solidifions d'abord la petite sphère, puis supprimons le liquide extérieur. On obtient ainsi un solide qui va posséder une rotation instantanée. Je dis que le vecteur rotation devient le tourbillon $\vec{T}$ au point P lorsque le rayon de la sphère tend vers zéro.

En effet, nous avons à l'instant t introduit brusquement des liaisons entre les points de la sphère et supprimé les liaisons avec la masse extérieure. Il y a eu des percussions. Ce sont des percussions de liaisons, par conséquent le système des percussions extérieures est équivalent à zéro, et, par suite, la quantité de mouvement du système n'a pas varié. Soient u, v, w les composantes du vecteur vitesse du centre de gravité P de la sphère (fig. 225). Supposons le rayon de la sphère assez petit pour que la densité ρ puisse être considérée comme constante et égale à sa valeur ρ_0 au centre. Le point P est alors le centre de gravité du solide. Appliquons le théorème de la variation du mouvement cinétique par rapport à des axes de directions fixes. Il faut écrire que le moment cinétique pour le mouvement relatif à ces axes n'a pas varié pendant le choc.

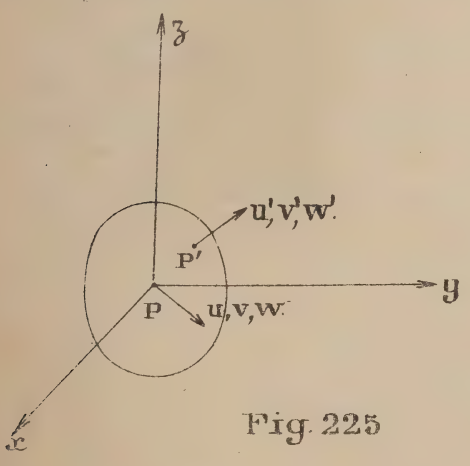

Fig. 225

Après le choc, les composantes du moment cinétique sont

$$Ip\ ,\quad Iq\ ,\quad Ir,$$

I désignant le moment d'inertie de la sphère par rapport

à un diamètre, p, q, r la rotation.

Au début du choc, les composantes de ce moment sont

$$\Sigma m(y_1 w_1 - z_1 v_1),\ \Sigma m(z_1 u_1 - x_1 w_1),\ \Sigma m(x_1 v_1 - y_1 u_1),$$

x_1, y_1, z_1 désignant les coordonnées d'un point P_1 de la sphère par rapport aux axes Px, Py, Pz et u_1, v_1, w_1 les composantes de la vitesse relative de ce point dont la vitesse absolue est $\overrightarrow{W'}(u', v', w')$.

$$u_1 = u' - u \quad , \quad v_1 = v' - v \quad , \quad w_1 = w' - w.$$

En développant par la formule de Taylor,

$$u_1 = \left(x_1 \frac{\partial u}{\partial x} + y_1 \frac{\partial u}{\partial y} + z_1 \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \dots \quad ,$$

$$v_1 = \left(x_1 \frac{\partial v}{\partial x} + y_1 \frac{\partial v}{\partial y} + z_1 \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \dots \quad ,$$

$$w_1 = \left(x_1 \frac{\partial w}{\partial x} + y_1 \frac{\partial w}{\partial y} + z_1 \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \dots \quad ,$$

Par suite,

$$\Sigma m(y_1 w_1 - z_1 v_1) = \frac{\partial w}{\partial x} \Sigma m x_1 y_1 + \frac{\partial w}{\partial y} \Sigma m y_1^2 + \frac{\partial w}{\partial z} \Sigma m y_1 z_1$$

$$- \frac{\partial v}{\partial x} \Sigma m x_1 z_1 - \frac{\partial v}{\partial y} \Sigma m y_1 z_1 - \frac{\partial v}{\partial z} \Sigma m z_1^2 + \dots$$

Les axes Px, Py, Pz étant des axes principaux d'inertie, on a

$$\Sigma m y_1 x_1 = \Sigma m y_1 z_1 = \Sigma m x_1 z_1 = \Sigma m y_1 z_1 = 0,$$

donc

$$\Sigma m(y_1 w_1 - z_1 v_1) = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \cdot \frac{I}{2} + \dots$$

c'est-à-dire

$$\Sigma m(y_1 w_1 - z_1 v_1) = I \xi + \dots$$

En écrivant que la quantité de mouvement relative n'a pas varié durant le choc, on a :

$$I p = I \xi + \dots \quad ,$$

$$I q = I \eta + \dots \quad ,$$

$$I r = I \zeta + \dots \quad .$$

Et, en faisant tendre vers zéro le rayon de la sphère

$$\xi = \lim. \; p,$$
$$\eta = \lim. \; q,$$
$$\zeta = \lim. \; r.$$

C'était bien ce que nous nous proposions d'établir.

Introduisons les tourbillons dans les équations de l'hydrodynamique.

On a

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\overline{W}^2\right) = \frac{\partial \frac{1}{2}}{\partial x}\left(u^2+v^2+w^2\right) = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x};$$

La première équation s'écrit donc, en retranchant la précédente membre à membre,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + w\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = X - \frac{\partial\left(\frac{1}{2}W^2\right)}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2\eta w - 2\zeta v = X - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}W^2\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

de même, les deux autres équations deviennent

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\left(\zeta u - \xi w\right) = Y - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}W^2\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + 2\left(\xi v - \eta u\right) = Z - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}W^2\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Supposons que X, Y, Z soient les dérivées partielles d'une fonction $U(x,y,z,t)$, et que ρ soit fonction de p seulement. En posant encore

$$P = \int \frac{dp}{\rho} \quad ; \qquad Q = U - P,$$

on a

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

et, en posant

$$H(x,y,z,t) = Q - \frac{1}{2}W^2),$$

les équations prennent la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2(\eta w - \zeta v) = \frac{\partial H}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2(\zeta u - \xi w) = \frac{\partial H}{\partial y},$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + 2(\xi v - \eta u) = \frac{\partial H}{\partial z}.$$

Ces équations peuvent être écrites pour un fluide quelconque ; si on élimine H, on aura des équations générales auxquelles satisfont les tourbillons. Ce sont les équations d'Helmholtz.

Pour faire cette élimination, écrivons que

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^2 H}{\partial z\,\partial y}.$$

Cela donne

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial y} + 2\left[\frac{\partial}{\partial z}(\zeta u - \xi w) - \frac{\partial}{\partial y}(\xi v - \eta u)\right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) + 2\left[\frac{\partial}{\partial z}(\zeta u - \xi w) - \frac{\partial}{\partial y}(\xi v - \eta u)\right] = 0,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} - u\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right) + \xi\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \zeta\frac{\partial u}{\partial z} - \eta\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial \xi}{\partial z} + v\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0$$

Comme on a

$$\operatorname{div}\vec{T} = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$$

l'équation précédente s'écrit

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u\frac{\partial \xi}{\partial x} + v\frac{\partial \xi}{\partial y} + w\frac{\partial \xi}{\partial z} + \xi\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \zeta\frac{\partial u}{\partial z} - \eta\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

et, d'après l'équation de continuité

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}\vec{W} = 0,$$

$$\frac{d\xi}{dt} - \xi\left(\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \eta\frac{\partial u}{\partial y} - \zeta\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

ou

$$\frac{d\frac{\xi}{\rho}}{dt} - \frac{\xi}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \xi\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\frac{\partial u}{\partial y} + \zeta\frac{\partial u}{\partial z},$$

et, en divisant les deux membres par ρ,

$$\frac{d\left(\frac{\xi}{\rho}\right)}{dt} = \frac{\xi}{\rho}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\zeta}{\rho}\frac{\partial u}{\partial z},$$

de même

$$\frac{d\left(\frac{\eta}{\rho}\right)}{dt} = \frac{\xi}{\rho}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\zeta}{\rho}\frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\frac{d\left(\frac{\zeta}{\rho}\right)}{dt} = \frac{\xi}{\rho}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\zeta}{\rho}\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Telles sont les équations d'Helmholtz. Ce sont des équations différentielles en $\frac{\xi}{\rho}$, $\frac{\eta}{\rho}$, $\frac{\zeta}{\rho}$. Quand on se donne les valeurs $\frac{\xi_0}{\rho_0}$, $\frac{\eta_0}{\rho_0}$, $\frac{\zeta_0}{\rho_0}$ correspondant à $t = t_0$, ces fonctions sont déterminées d'une manière unique. En particulier, si nous prenons ces valeurs initiales égales à zéro, le système admet la solution $\frac{\xi}{\rho} = 0$, $\frac{\eta}{\rho} = 0$, $\frac{\zeta}{\rho} = 0$ et cette solution est la seule.

Donc, si à un instant déterminé le champ des tourbillons est nul, il reste nul pendant tout le mouvement.

73 — <u>Théorème de Lagrange</u>. — Si le tourbillon $\vec{T}$ est nul en chaque point, c'est que le champ des vitesses dérive d'un potentiel. Donc : <u>Si à un instant donné il y a un potentiel des vitesses, il y en aura un à tout instant</u> ; c'est le théorème de Lagrange.

Dans le cas où il existe un potentiel des vitesses, l'intégration des équations différentielles de l'hydrodynamique est simplifiée.

Dans ce cas, en effet, les équations prennent la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial z}$$

car $\xi = \eta = \zeta = 0$. Comme

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad , \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad , \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad ,$$

$\varphi(x, y, z, t)$ désignant le potentiel à l'instant t, elles peuvent s'écrire

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial t} = \frac{\partial H}{\partial x} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(H - \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = 0 \, ,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \, \partial t} = \frac{\partial H}{\partial y} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(H - \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = 0 \, ,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \, \partial t} = \frac{\partial H}{\partial z} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(H - \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = 0 \, ,$$

ce qui montre que

$H - \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ est indépendant de x, y, z .

On peut donc écrire

$$H - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \chi(t)$$

On peut d'ailleurs supposer $\chi(t) = 0$, car si $\varphi(x, y, z, t)$ est un potentiel des vitesses, il en est de même de $\varphi_1 = \varphi(x, y, z, t) + \Phi(t)$. En prenant ici $\varphi_1 = \varphi + \int \chi(t) \, dt$, on a

$$H - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = 0 \, .$$

Supposons donc $\psi(t) \equiv 0$,

les trois premières équations de l'hydrodynamique se réduisent alors à une seule

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = U(x, y, z, t) - \int \frac{dp}{\rho}$$

puisque

$$H = U(x,y,z,t) - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{1}{2} W^2$$

Ajoutons l'équation de continuité

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial z}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \rho\,\Delta\varphi = 0,$$

nous aurons deux équations aux dérivées particelles pour déterminer φ et ρ.

Dans le cas d'un liquide incompressible à température constante, ρ est constant et, par suite, l'équation de continuité devient

$$\Delta \varphi = 0$$

Elle exprime que φ est une fonction harmonique.

Chapitre X

Attraction et Potentiel.

174 — **Action mutuelle de deux points isolés.** — La loi de l'attraction universelle est la suivante : Deux points matériels de masses m et m' situés à la distance r exercent l'un sur l'autre une attraction d'intensité

$$k \cdot \frac{m \cdot m'}{r^2} ;$$

k désigne l'action de l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance. Nous supposerons les unités choisies de façon que $k = 1$, et nous conviendrons de regarder l'action mutuelle de deux points comme positive quand les points se repoussent, et comme négative quand ils s'attirent. Nous pouvons donc dire que l'attraction mutuelle de deux masses m et m' est

$$-\frac{m\,m'}{r^2}$$

Les actions électriques ou magnétiques sont représentées par la même formule en convenant d'affecter de signes les masses électriques ou magnétiques.

175 — **Action sur un point de plusieurs points isolés. Potentiel.** — Considérons n points matériels

$M_1, M_2, \ldots, M_n$, de masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Un point P de masse m' subit de la part de chacun des points M_i une attraction mesurée sur l'axe $M_i P$ par

$$-\frac{m_i m'}{r_i^2} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Cette action dérive de la fonction de forces $\frac{m_i m'}{r}$, donc la résultante de toutes ces attractions dérive d'une fonction de forces $m'U$ en posant

$$U = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \ldots + \frac{m_n}{r_n} = \sum \frac{m_i}{r_i} .$$

La fonction U s'appelle le potentiel. Si x, y, z sont les coordonnées du point P les projections de l'attraction résultant des actions des points M_i peuvent s'écrire

$$X = m' \frac{\partial U}{\partial x} , \quad Y = m' \frac{\partial U}{\partial y} , \quad Z = m' \frac{\partial U}{\partial z} .$$

La fonction U est une fonction continue sauf aux points $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Nous allons montrer qu'en dehors des centres attractifs, elle vérifie l'équation de Laplace

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 .$$

Soit en effet a, b, c les coordonnées d'un point M, on a

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 ,$$

donc

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x-a}{r^3}$$

et

$$\frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2} = 3 \frac{(x-a)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} ,$$

$$\frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y^2} = 3 \frac{(y-b)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} ,$$

$$\frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z^2} = 3 \frac{(z-c)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} .$$

En ajoutant ces trois expressions, on trouve zéro dans le second membre donc

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

Et, d'après l'expression de u,

$$\Delta u = \Sigma m_i \Delta\left(\frac{1}{r_i}\right) = 0 .$$

176 — <u>Théorème de Gauss</u>. — Considérons une surface fermée (S) et n centres attractifs $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Proposons-nous d'évaluer le flux de force à travers la surface (S), de l'intérieur vers l'extérieur, pour l'attraction exercée par les centres $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sur un point de masse 1.

Soit $d\sigma$ un élément de l'aire de la surface (S) entourant le point P, le flux élémentaire qui sort de cette surface est

$$\frac{du}{dn}\, d\sigma ,$$

$\frac{du}{dn}$ désignant la dérivée du potentiel u suivant la normale en P extérieure à (S). Le flux total est

$$\iint_S \frac{du}{dn}\, d\sigma .$$

Pour évaluer cette intégrale nous distinguerons deux cas

1° <u>Aucun point attractif n'est intérieur à la surface (S)</u>. La fonction u est alors continue à l'intérieur de S, et en transformant l'intégrale de surface en une intégrale de volume, on a

$$\iint_S \frac{du}{dn}\, d\sigma = \iiint_V \Delta u \, d\tau ,$$

l'intégrale triple étant étendue au volume intérieur à (S)

Or, en dehors des centres d'attraction, on a

$$\Delta u = 0 ,$$

donc l'intégrale précédente est nulle, et le flux total qui sort de la surface (S) est nul.

2° Certains des centres attractifs sont intérieurs à (S). Traçons autour de chaque centre attractif intérieur à (S) une sphère ayant ce point pour centre et un rayon très petit. Si nous considérons la surface (Σ) limitant le volume intérieur à (S) et extérieur aux sphères, cette surface ne contient plus de centres attractifs à son intérieur, donc le flux total qui en sort est nul. Or ce flux se compose du flux qui sort de la surface (S) et du flux qui entre dans les sphères ; il en résulte que le flux sortant de (S) est égal au flux sortant des sphères. Calculons ce flux pour une sphère entourant le point M de masse m, il est égal

$$m \iint \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}\, d\sigma,$$

étendue à la sphère de centre M et de rayon r, la dérivée étant prise dans le sens de la normale extérieure.
Or,

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} = \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dr} = -\frac{1}{r^2},$$

donc,

$$m \iint \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\, d\sigma = -\, m \iint \frac{1}{r^2}\, d\sigma = -4\pi m.$$

Si M' désigne la somme des masses des centres attractifs intérieurs à (S), le flux total sortant de (S) est égal à $-4\pi M'$. C'est le théorème de Gauss :

Le flux total sortant d'une surface fermée (S) est égal au produit par -4π de la somme des masses attirantes intérieures à (S).

177 — Attraction d'une masse continue sur un point extérieur. — Considérons des masses

attirantes formant une ligne, une surface, ou un volume, et un point P, de masse 1, extérieur à ces masses. Décomposons la masse attirante en éléments infiniment petits de coordonnées a, b, c et de masse dm. Le potentiel au point P pour cet élément est $\frac{dm}{r}$, et les composantes de l'attraction exercée par lui sur le point P de coordonnées x, y, z sont

$$\frac{a-x}{r^3}\,dm\,,\quad \frac{b-y}{r^3}\,dm\,,\quad \frac{c-z}{r^3}\,dm.$$

Le potentiel résultant de toutes les attractions est donc

$$u = \int \frac{dm}{r}\,,$$

et les composantes de l'attraction résultante sont

$$X = \int \frac{a-x}{r^3}\,dm\,,\quad Y = \int \frac{b-y}{r^3}\,dm\,,\quad Z = \int \frac{c-z}{r^3}\,dm;$$

les intégrales étant étendues à tous les éléments attirants dm. Ces intégrales seront simples, doubles ou triples, suivant que la masse attirante est répartie sur une ligne, sur une surface ou sur un volume.

Le point P étant extérieur au champ d'intégration, l'élément différentiel reste fini dans tout le champ, et on peut différentier sous le signe $\int$. Comme les limites sont indépendantes de x, y, z on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\int \frac{dm}{r^2}\,\frac{\partial r}{\partial x} = \int \frac{a-x}{r^3}\,dm,$$

d'où il résulte que

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}\,,\quad Y = \frac{\partial u}{\partial y}\,,\quad Z = \frac{\partial u}{\partial z}$$

178 — <u>Etude du potentiel à l'infini</u>. — Proposons-nous d'étudier ce que devient le potentiel en un point qui s'éloigne indéfiniment. Soit (fig. 226) R_0 le rayon d'une sphère ayant pour centre un point O et comprenant à

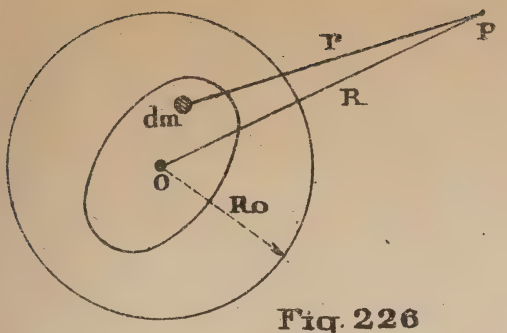

Fig. 226

son intérieur tous les points attirants ; r désignant la distance du point P à un élément attractif dm, et R sa distance au point O, on a

$$R - R_0 \leqslant r \leqslant R + R_0 ,$$

donc

$$\frac{dm}{R+R_0} \leqslant \frac{dm}{r} \leqslant \frac{dm}{R-R_0} ,$$

et, par suite, en intégrant

$$\frac{M}{R+R_0} < u < \frac{M}{R-R_0} ,$$

M désignant la masse totale attirante et u le potentiel au point P.

Quand le point P s'éloigne indéfiniment le potentiel u tend donc vers zéro ; d'autre part, comme on a

$$\frac{MR}{R+R_0} < uR < \frac{MR}{R-R_0} ,$$

le produit uR tend vers M quand R croît indéfiniment, en d'autres termes, ε étant infiniment petit avec $\frac{1}{R}$, on a

$$uR = M + \varepsilon , \quad u = \frac{M}{R} + \frac{\varepsilon}{R} .$$

ce qui montre que le potentiel produit par une masse attirante continue en un point P très éloigné a pour partie principale le potentiel que produirait en ce point la masse totale concentrée en un point quelconque O

179 — <u>Attraction d'une couche sphérique homogène sur un point extérieur</u>. — Considérons une couche homogène de densité ρ comprise entre deux sphères concentriques de rayons r_1 et r_2 (fig. 227). Proposons-nous de trouver le potentiel en un point P extérieur à la masse

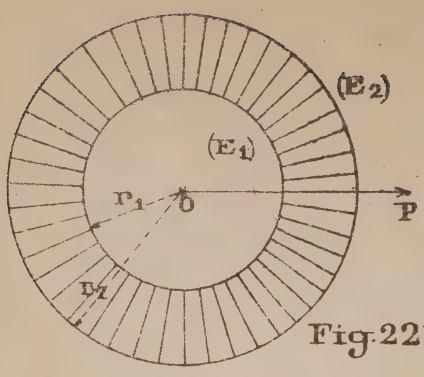

Fig. 227

attirante, r désignant la distance du point P au centre commun O des deux sphères, l'extérieure de la masse attirante se compose de deux régions ; l'une (E_1), constituée par la partie creuse entourant le point O, est telle que $r \leqslant r_1$, l'autre (E_2), constituée par l'espace indéfini entourant la masse et telle que $r \geqslant r_2$. Pour calculer la valeur du potentiel U dans chacune de ces deux régions, remarquons que, dans chacune d'elles, U vérifie l'équation de Laplace $\Delta U = 0$, et que U est par raison de symétrie fonction de la seule distance r. On peut aussi dire que U est fonction de $\frac{1}{r}$ et chercher la forme des fonctions $U = \varphi(\frac{1}{r})$ vérifiant l'équation de Laplace. En calculant ΔU on a,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \varphi'\left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \varphi''\left(\frac{1}{r}\right)\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right)^2 + \varphi'\left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}$$

En ajoutant les expressions analogues obtenues pour $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$, et en remarquant que $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$, on voit que l'équation de Laplace se réduit à

$$\varphi''\left(\frac{1}{r}\right) = 0,$$

donc U est une fonction linéaire de $\frac{1}{r}$,

$$U = \frac{A}{r} + B,$$

A et B étant deux constantes qu'il faut déterminer suivant la position du point P.

1°) Le point P est dans la région (E_2), $r \geqslant r_2$. — Dans ce cas il peut s'éloigner indéfiniment. Mais alors U doit être

nul à l'infini ; il faut donc que B soit nul. D'autre part comme le produit ur doit tendre vers la masse attirante M quand r augmente indéfiniment, $A = M$. On a donc finalement

$$U = \frac{M}{R},$$

d'où le théorème :

Le potentiel dû à une couche sphérique homogène sur un point de l'espace extérieur indéfini, et par suite, l'attraction exercée sur ce point, sont les mêmes que si toute la masse était concentrée au centre.

2°) Le point est dans la région (E_1). $r \leqslant r_1$. Le potentiel en un point P de la région creuse (E_1) est encore donné par la formule $u = \frac{A}{r} + B$; mais comme le potentiel reste fini pour toutes les positions de P, il faut que A soit nul, car autrement u deviendrait infini en O. Le potentiel est donc constant $u = B$, à l'intérieur de (E_1), et l'attraction de la couche sphérique sur un point placé dans cette région est nulle. Pour calculer la valeur de la constante B, calculons le potentiel en O. Décomposons la couche sphérique en couches concentriques infiniment minces comprises entre deux sphères de centre O et de rayons r et $r + dr$. La masse d'une de ces couches étant $4\pi r^2 \rho dr$, ρ désignant la densité, le potentiel au point O, situé à la même distance r de tous ses éléments, est

$$\frac{4\pi r^2 \rho dr}{r} = 4\pi \rho r dr.$$

Le potentiel total est donc

$$u = \int_{r_1}^{r_2} 4\pi \rho r dr = 2\pi \rho (r_2^2 - r_1^2).$$

Remarque. — On obtient les mêmes résultats si la masse au lieu d'être homogène est formée de couches sphériques homogènes.

180 — Potentiel et attraction d'un volume continu sur un point intérieur. — Formule de Poisson.

Considérons d'abord le cas particulier où la masse attirante est une couche sphérique homogène (fig. 228). Soit r la distance du centre O à un point P intérieur à la couche. Décomposons cette couche en deux couches sphériques (E_1) et (E_2) par la sphère de centre O et de rayon r. Le potentiel créé au point P est la somme du potentiel créé par la couche (E_1) et du potentiel créé par la couche (E_2). On a donc

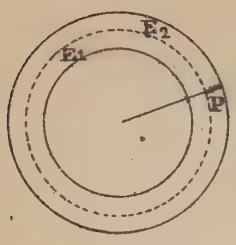

Fig. 228

$$U = \frac{4}{3}\pi\rho\frac{(r^3 - r_1^3)}{r} + 2\pi\rho(r_2^2 - r^2),$$

ou

$$U = 2\pi\rho r_2^2 - \frac{2}{3}\pi\rho r^2 - \frac{4}{3}\pi\rho\frac{r_1^3}{r}.$$

L'attraction F de la couche sur le point P se réduit à l'attraction de la partie E_1. On a donc

$$F = -\frac{4}{3}\pi\rho\frac{(r^3 - r_1^3)}{r^2} = -\frac{4}{3}\pi\rho r + \frac{4}{3}\pi\rho\frac{r_1^3}{r^2}.$$

On vérifie que l'on a

$$\frac{dU}{dr} = F,$$

donc, les composantes X, Y, Z de l'attraction sont encore

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

En calculant ΔU, on a

$$\Delta U = -\frac{2}{3}\pi\rho\,\Delta(r^2) - \frac{4}{3}\pi\rho r_1^3\,\Delta\left(\frac{1}{r}\right),$$

et comme

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0, \quad \Delta r^2 = 6,$$

$$\Delta U = -4\pi\rho.$$

Nous avons donc obtenu les résultats suivants :

1°) Les fonctions U, X, Y, Z restent finies et déterminées en tout point de l'espace.

2°) La fonction U admet en tout point de l'espace des dérivées premières qui sont les composantes de l'attraction, et il en résulte que la fonction U est continue dans tout l'espace.

3°) Les fonctions X, Y, Z admettent dans tout l'espace des dérivées premières, c'est-à-dire que la fonction U admet dans tout l'espace des dérivées secondes ; il en résulte que les fonctions X, Y, Z sont continues dans tout l'espace.

4°) Quand le point P est dans le volume attirant, le potentiel en ce point vérifie l'équation de Poisson

$$\Delta U = -4\pi\rho,$$

ρ désignant la densité de la masse attirante.

5°) Les dérivées secondes de U sont discontinues quand le point P traverse la surface du volume attirant.

Nous allons démontrer les propositions précédentes en supposant que la masse attirante remplisse un volume quelconque.

Soit P un point placé à l'intérieur du volume attirant. Menons par P (fig. 229) trois axes de coordonnées rectangulaires Px, Py, Pz parallèles aux axes Ox Oy Oz et,

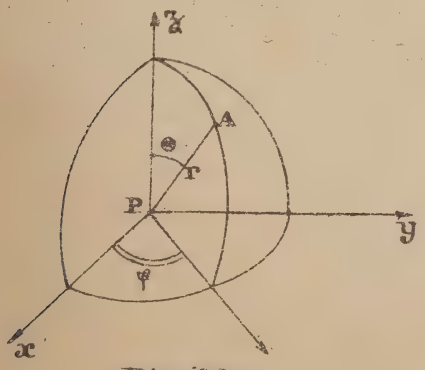

Fig. 229

définissons la position d'un point A de l'espace par ses coordonnées polaires $PA = r$, $\widehat{APz} = \theta$, et l'angle φ du plan APz et du plan xOz. Les coordonnées a b c du point A par rapport aux axes Oxyz sont données par

$$a = x + r \sin\theta \cos\varphi,$$
$$b = y + r \sin\theta \sin\varphi,$$
$$c = z + r \cos\theta$$

L'élément de volume $d\tau$ entourant le point A

ayant pour expression

$$d\tau = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi,$$

les expressions de X, Y, Z, U deviennent alors

$$X = \iiint \rho \sin^2\theta \cos\varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi,$$

$$Y = \iiint \rho \sin^2\theta \sin\varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi,$$

$$Z = \iiint \rho \sin\theta \cos\varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi,$$

$$U = \iiint \rho r \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi.$$

Ces intégrales ont leurs éléments différentiels finis et sont étendues à des domaines finis : elles conservent des valeurs finies et bien déterminées à l'intérieur de la masse attirante. Soit L la longueur de la plus grande corde du volume attirant et ρ_0 une limite supérieure de la fonction ρ. On a

$$|U| < \rho_0 \iiint r \, dr \, d\theta \, d\varphi,$$

$$|U| < \rho_0 \iint d\theta \, d\varphi \int_0^{r_1} r \, dr,$$

et, comme

$$\frac{1}{2} r_1^2 < \frac{L^2}{2},$$

$$|U| < \rho_0 \frac{L^2}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta,$$

$$|U| < \pi^2 \rho_0 L^2.$$

Si le volume entourant le point P tend vers zéro dans toutes ses dimensions, (U) est un infiniment petit du second ordre par rapport à la longueur de la plus grande corde du volume prise comme infiniment petit principal.

On a de même

$$|X| < \rho_0 \iiint dr \, d\varphi \, d\theta$$

$$|X| < 2\pi^2 \rho_0 L,$$

et, d'une manière analogue

$$|Y| < 2\pi^2 \rho_0 L, \qquad |Z| < 2\pi^2 \rho_0 L.$$

L'attraction est donc un infiniment petit du premier ordre par rapport à L.

Calculons les dérivées secondes du potentiel. Pour un point extérieur à la masse attirante, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ est la dérivée de l'intégrale

$$\iiint \rho \frac{(a-x)}{r^3}\, d\tau,$$

ce qui donne

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \iiint \rho \left[\frac{3(a-x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right] d\tau,$$

c'est-à-dire en passant aux coordonnées polaires :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \iiint \frac{\rho}{r}\left[3\sin^2\theta\cos^2\varphi - 1\right] \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi.$$

Quand le point P est à l'intérieur du volume attirant, on ne peut plus calculer les dérivées secondes par la règle de différentiation sous le signe $\int$. Cela tient à ce que l'intégrale précédente n'a plus de sens à cause du facteur $\frac{1}{r}$ qui devient infini. Pour bien mettre ce fait en évidence, entourons le point P d'une petite sphère de rayon δ (fig. 220). Calculons l'intégrale relative au volume attirant extérieur à la sphère et cherchons-en la limite quand δ tend vers zéro. La valeur de cette intégrale est

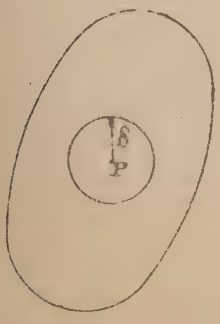

Fig. 230

$$\iint \left[3\sin^2\theta\cos^2\varphi - 1\right] \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \int_\delta^{r_1} \rho \frac{dr}{r}.$$

Supposons, pour simplifier, que la densité ρ soit constante, l'intégrale précédente devient :

$$\iint \rho\left(3\sin^2\theta\cos^2\varphi - 1\right) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \left[\log r_1 + \log\frac{1}{\delta}\right]$$

Expression de la forme

$$A + B \log \frac{1}{\delta},$$

A et B étant deux constantes. Or, quand δ tend vers zéro, cette expression augmente indéfiniment ; donc, les dérivées secondes qui existent, d'ailleurs, comme nous le verrons plus loin, ne sont plus représentées par des intégrales obtenues en différentiant sous le signe $\int$.

181 — **Les relations $X = \frac{\partial u}{\partial x}$, ... subsistent à l'intérieur du volume attirant.** — Soit P un point de coordonnées x, y, z intérieur au volume attirant. Donnons à x un accroissement h, P occupe une position P' de coordonnées $x + h, y, z$, et le potentiel U a subi un accroissement δU. Proposons-nous de chercher la limite de $\frac{\delta U}{h}$ quand h tend vers zéro.

Traçons du point P comme centre une petite sphère renfermant le point P' (fig. 231). Cette sphère partage le volume attirant en deux régions l'une (1) extérieure à la sphère, l'autre (2) intérieure. Le potentiel U au point P est la somme des potentiels U_1 et U_2 relatifs aux régions (1) et (2),

$$U = U_1 + U_2.$$

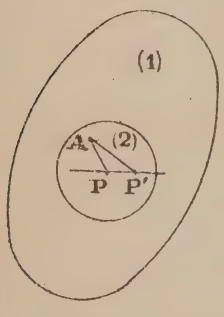

Fig. 231

Donc

$$\delta U = \delta U_1 + \delta U_2,$$

$$\frac{\delta U}{h} = \frac{\delta U_1}{h} + \frac{\delta U_2}{h}.$$

Or

$$U_2 = \iiint \rho \frac{d\tau}{r},$$

l'intégrale triple étant étendue à la sphère (1), r désignant la distance d'un point A du volume de cette sphère au point P. En appelant r' la distance de A à P' on a

$$\delta U_2 = \iiint \rho \, d\tau \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right) = \iiint \rho \, d\tau \left(\frac{r - r'}{r r'}\right),$$

et
$$\frac{\delta U_2}{h} = \iiint \rho \frac{r - r'}{h} \cdot \frac{d\tau}{rr'} .$$

Comme
$$|h| > |r - r'| ,$$

on a
$$\left|\frac{\delta U_2}{h}\right| < \iiint \frac{\rho}{rr'} d\tau$$

et comme
$$\frac{1}{rr'} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2}\right),$$

$$\left|\frac{\delta U_2}{h}\right| < \frac{1}{2}\iiint \frac{\rho\, d\tau}{r^2} + \frac{1}{2}\iiint \frac{\rho\, d\tau}{r'^2} .$$

En passant aux coordonnées polaires,
$$\iiint \frac{\rho\, d\tau}{r^2} = \iiint \rho \sin\theta\, d\varphi\, dr\, d\theta ,$$

et, en désignant par η le rayon de la sphère,
$$\iiint \rho \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi < 4\pi^2 \rho \eta .$$

De même on a
$$\iiint \frac{\rho\, d\tau}{r'^2} < 4\pi^2 \rho \eta ,$$

donc
$$\left|\frac{\delta U_2}{h}\right| < 8\pi^2 \rho \eta .$$

Ainsi dans la formule
$$\frac{\delta U}{h} = \frac{\delta U_1}{h} + \frac{\delta U_2}{h} ,$$

quand h tend vers zéro, le rapport $\frac{\delta U_1}{h}$ tend vers la composante X_1 de l'attraction au point P due à la région (1). Or, on peut prendre le volume (2) assez petit pour que X_1, qui est continue diffère aussi peu qu'on le veut de X et que $\left(\frac{\delta U_2}{h}\right)$ soit aussi petit que l'on veut. Donc $\frac{\delta U}{h}$ tend vers X et on peut encore écrire
$$X = \frac{\partial U}{\partial x}$$

On a de même $Y = \frac{\partial U}{\partial y}$, $Z = \frac{\partial U}{\partial z}$, et la fonction U

ayant des dérivées premières en tous les points de l'espace est continue.

182 — Dérivées secondes du potentiel. — D'après ce que nous venons de voir, on a toujours, que le point P soit intérieur ou extérieur au volume attirant,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \iiint \rho \frac{(a-x)}{r^3} d\tau$$

Comme

$$\frac{a-x}{r^3} = -\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial a},$$

on peut écrire

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\iiint \rho \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial a} dr = -\iiint \frac{\partial\left(\frac{\rho}{r}\right)}{\partial a} dr + \iiint \frac{1}{r}\frac{\partial \rho}{\partial a} d\tau,$$

car

$$\frac{a-x}{r^3}\rho = -\rho \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial a} = \frac{-\partial\left(\frac{\rho}{r}\right)}{\partial a} + \frac{1}{r}\frac{\partial \rho}{\partial a}.$$

Appliquons à la première de ces intégrales la formule d'Ostrogradsky. Remarquons pour cela que la fonction $\frac{\rho}{r}$ de a, b, c devient infinie quand le point a, b, c coïncide avec le point P. Entourons alors le point P d'une petite sphère (s) de rayon δ (fig. 232).

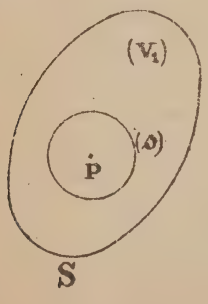

Fig. 232

Nous pourrons appliquer la formule d'Ostrogradsky au volume V_1 compris entre la surface (S) du volume attirant et la surface (s) de la sphère. Nous aurons

$$\iiint_{V_1} \frac{\partial\left(\frac{\rho}{r}\right)}{\partial a} da\, db\, dc =$$

$$= \iint_{(S)} \frac{\rho}{r} \cos\alpha\, d\sigma + \iint_{(s)} \frac{\rho}{r} \cos\alpha\, d\sigma,$$

α étant l'angle que fait avec Ox, les normales aux surfaces (S) et (s) extérieures au volume V_1.

Soit ρ_0 le maximum de ρ dans le volume attirant,

on a

$$\left| \iint_{(s)} \frac{\rho}{r} \cos\alpha \, d\sigma \right| < \frac{\rho_0}{\delta} \iint d\sigma = 4\pi \rho_0 \delta,$$

cette intégrale tend vers zéro avec δ. L'intégrale triple a donc une limite qui est l'intégrale étendue au volume (V) limité par (S).

La formule d'Ostrogradsky donne donc, en faisant tendre δ vers zéro,

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial\left(\frac{\rho}{r}\right)}{\partial a} da \, db \, dc = \iint_{(S)} \frac{\rho \cos\alpha}{r} d\sigma,$$

d'où

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\iint_{(S)} \frac{\rho}{r} \cos\alpha \, d\sigma + \iiint_{(V)} \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial a} d\tau.$$

La première intégrale représente un potentiel de surface, la densité étant $\rho \cos\alpha$, la seconde représente un potentiel de volume, la densité étant $\frac{\partial \rho}{\partial a}$. Chacune de ces deux intégrales a donc des dérivées partielles que l'on peut obtenir par la règle de différentiation sous le signe $\int$.

On obtient ainsi

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\iint_{(S)} \rho \cos\alpha \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} d\sigma + \iiint_{(V)} \frac{\partial \rho}{\partial a} \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} d\tau.$$

On trouverait de même

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \text{ et } \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

3 — Equation de Poisson. — Calculons

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

On a

$$\Delta U = -\iint_{(S)} \rho \frac{(a-x)\cos\alpha + (b-y)\cos\beta + (c-z)\cos\gamma}{r^2} d\delta$$

$$+ \iiint_{(V)} \frac{\frac{\partial \rho}{\partial a}(a-x) + \frac{\partial \rho}{\partial b}(b-y) + \frac{\partial \rho}{\partial c}(c-z)}{r^3} d\tau$$

Le point P étant à l'intérieur de la masse attirante entourons-le d'une sphère dont le rayon δ tendra vers zéro (fig. 233). Le potentiel U au point P est la somme du potentiel U_1 dû au volume (V_1) et du potentiel U_2 dû à (V_2). On a donc

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2$$

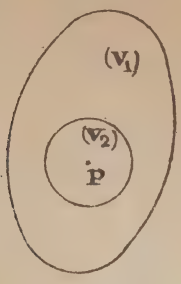

Fig. 233

Mais ΔU_1 est nul car le point P est extérieur au volume (V_1). Calculons donc ΔU_2 pour la sphère considérée. La deuxième intégrale qui entre dans le second membre de ΔU_2, représente une attraction et tend vers zéro avec δ. Quant à la première, comme,

$$\cos\alpha = \frac{a-x}{r}, \quad \cos\beta = \frac{b-y}{r}, \quad \cos\gamma = \frac{c-z}{r},$$

elle devient

$$-\iint \rho \frac{d\sigma}{r^2} = -\frac{1}{\delta^2}\iint \rho\, d\sigma$$

D'après la formule la moyenne

$$\iint \rho\, d\sigma = 4\pi\delta^2\rho',$$

ρ' désignant la valeur de ρ en un point intérieur à la sphère. Or, quand δ tend vers zéro, ρ' tend vers ρ et à la limite on a

$$\Delta U = -4\pi\rho$$

C'est l'équation de Poisson. On peut dire qu'elle contient comme cas particulier l'équation de Laplace car si le point P est extérieur au volume attirant ρ est nul en ce point, et l'on a :

$$\Delta U = 0$$

184 — Théorème de Gauss. — On peut étendre, au champ de forces créé par un volume attirant, le théorème de Gauss démontré dans le cas de l'attraction de

points isolés.

Considérons une surface fermée (Σ) et proposons-nous d'évaluer le flux qui sort de cette surface. Distinguons trois cas.

1°). Il n'y a pas de masse à l'intérieur de (Σ). — Le flux est donné par l'expression

$$\iint_{(\Sigma)} \frac{dU}{dn}\, d\sigma,$$

et en transformant cette intégrale d'après la formule de Green, on a

$$\iint_{(\Sigma)} \frac{dU}{dn}\, d\sigma = \iiint \Delta V\, d\tau,$$

quantité qui est identiquement nulle puisque $\Delta V = 0$ à l'intérieur de Σ.

2°). La surface Σ est tout entière à l'intérieur des masses attirantes.

On a alors

$$\iint \frac{dU}{dn}\, d\sigma = \iiint \Delta V\, d\tau = -4\pi \iiint \rho\, d\tau,$$

d'après l'équation de Poisson. Et, comme

$$-4\pi \iiint \rho\, d\tau = -4\pi M',$$

M' désignant la somme des masses intérieures à (Σ), le flux qui sort de la surface (Σ) est égal à $-4\pi M'$.

3°) La surface Σ pénètre dans le volume attirant. — Découpons (fig. 234) dans le volume (Σ) à l'intersection avec le volume intérieur à (S) une petite portion de volume $\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2$. Soient (Σ_1) et (Σ_2) les deux parties du volume (Σ) ainsi obtenues, l'une intérieure à (S) l'autre extérieure.

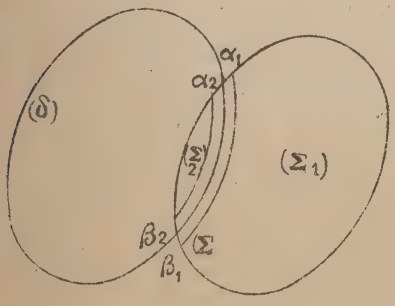

Fig. 234

La somme des flux sortant par les portions de surfaces $\alpha_1 \beta_1, \alpha_2 \beta_2$ ayant pour

limite zéro quand ces surfaces se rapprochent indéfiniment, le flux sortant par (Σ_1') étant nul puisqu'il n'y a pas de masse à l'intérieur, et le flux sortant par (Σ_2) étant égal à $-4\pi M'$, M' désignant la somme des masses intérieures à (Σ_2), le flux sortant par la surface (Σ) est, en passant à la limite, égal à $-4\pi M'$, M' désignant la somme des masses intérieures à (Σ').

185 _ <u>Masses attirantes illimitées - Attraction d'une barre homogène</u>. — Soit (fig. 235) une barre homogène attirante de densité $\rho = 1$, P un point attiré placé à la distance $PH = a$ de (Δ). Considérons un élément ds de la barre entourant le point A situé à la distance r de P; l'attraction due à cet élément est $\frac{ds}{r^2}$. Le cercle de diamètre PH est l'inverse de la droite (Δ), le pôle étant le point P, et la puissance a^2. Les droites PA, PA' qui interceptent sur la droite l'élément ds, découpent sur le cercle un arc $BB_1 = d\sigma$ et on a

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{r_1}{r},$$

avec $PB = r$. Donc

$$\frac{ds}{r^2} = \frac{d\sigma}{rr_1} = \frac{d\sigma}{a^2}.$$

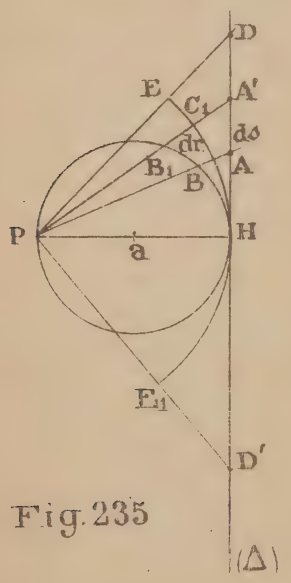

Fig. 235

Si l'on trace le cercle de centre P et de rayon a, les droites PB et PB_1 interceptent sur ce cercle un arc égal à $d\sigma$. Tout se passe donc comme si une couche homogène de matière attirante était placée sur l'arc EE' compris entre les deux droites PD, PD', DD' étant les extrémités de la barre attirante.

Si la barre Δ est indéfinie, l'arc EE' devient une demi-circonférence, l'attraction est dirigée suivant PH et

sa valeur est finie.

On peut d'ailleurs calculer directement cette attraction.

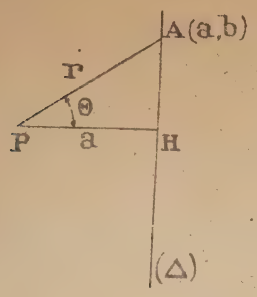

Fig 236

Soit (fig. 236) θ l'angle $\widehat{HPA}$; si $AH = b$, l'attraction produite par l'élément db est

$$\frac{db}{r^2}$$

Comme

$$b = a\,tg\,\theta \quad , \quad dl = \frac{a\,d\theta}{\cos^2\theta} ,$$

$$\frac{db}{r^2} = \frac{a\,d\theta}{\cos^2\theta} \cdot \frac{\cos^2\theta}{a^2} = \frac{d\theta}{a} .$$

Les composantes X, Y, de l'attraction suivant PH et la perpendiculaire sont donc :

$$\begin{cases} X = \dfrac{1}{a} \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta = \dfrac{2}{a} \\ Y = \dfrac{1}{a} \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta = 0 \end{cases}$$

L'attraction produite par la barre indéfinie est donc dirigée suivant PH et a pour valeur $\frac{2}{a}$.

Table des matières.

Table des matières

N°s		Pages
	Chapitre I - Principe des travaux virtuels	2
103	Cas particulier	6
104	Balance	7
105	Presse à vis	7
106	Suspension bifilaire	8
107	Conséquence du principe des travaux virtuels	9
108	Extension du principe des travaux virtuels - Système holonome	10
109	Système non holonome	11
110	Exemple de système non holonome : bille de billard	12
111	Liaisons unilatérales	15
112	Déplacements virtuels	15
113	Extension du Principe des travaux virtuels	19
114	Principe général des travaux virtuels	20
	Chapitre II - Equations de Lagrange	23
115	Formation des équations de Lagrange	23
116	Cas particulier	28
117	Paramètres surabondants	29
	Chapitre III - Exercice d'application des équations de Lagrange	34
118	Liaisons indépendantes du temps	34
119	Liaisons dépendant du temps	37

N°s		Pages
	Chapitre IV - Stabilité de l'Equilibre. Petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable	43
120	Recherche des positions d'équilibre	43
121	Recherche des positions d'équilibre stable	46
122	Théorème de Lejeune-Dirichlet	46
123	Etude des petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable	49
124	Exemple de système dépendant d'un seul paramètre	51
125	Systèmes à deux paramètres	57
126	Petites oscillations d'un pendule conique autour de sa position d'équilibre	63
127	Système à trois paramètres	65
	Chapitre V - Forme générale des Equations de la Mécanique	67
128	Equations d'Hamilton	67
	Chapitre VI - Chocs et Percussions	72
129	Impulsion	72
130	Choc - Percussion	73
131	Choc pour un système matériel	75
132	Exemples. I	77
133	Percussions appliquées à un solide mobile autour d'un axe fixe	78
134	Calcul des percussions de réactions	79
135	Pendule balistique	82
136	Travail des percussions	84
137	Théorème de Carnot	85

Nos		Pages
138	Exemples	86
139	Détermination des variations de vitesses	89
140	Exemples	92
	Chapitre VII - Systèmes déformables - Equilibre des fils	97
141	Conditions d'équilibre d'un fil	97
142	La force F est centrale	100
143	La force F est parallèle à une direction fixe	100
144	Equations intrinsèques de l'équilibre	101
145	Mouvement d'un fil	103
146	Exemple d'équilibre - Chaînette	103
147	Remarque	107
148	Deuxième exemple	109
149	Pont suspendu	109
150	Fil soumis à des liaisons - Cas des liaisons aux limites	111
151	Fil placé sur une surface	111
152	Extension au cas d'un fil du principe des travaux virtuels	115
	Chapitre VIII - Equilibre des fluides parfaits - Hydrostatique	120
153	Définitions	120
154	Forces agissant sur les fluides	120
155	Conditions d'équilibre d'un fluide	123
156	Equilibre relatif des fluides	127
157	Principe d'Archimède	130
158	Equilibre isotherme - Principe de Pascal	131
159	Pressions sur une paroi plane	132

Nos		Pages
160	Corps flottants	136
161	Théorèmes de Dupin	137
162	Equilibre du corps flottant	140
163	Théorème de Reech	141
164	Stabilité de l'équilibre	141
	Chapitre IX - Notions d'Hydrodynamique	146
165	Equations du mouvement	146
166	Variables de Lagrange	146
167	Equations de continuité	149
168	Conditions initiales et aux conditions aux limites	151
169	Variables d'Euler	152
170	Régime permanent - Théorème de Bernoulli	155
171	Théorème de Torricelli	157
172	Equations d'Helmholtz	158
173	Théorème de Lagrange	163
	Chapitre X - Attraction et Potentiel	166
174	Action mutuelle de deux points isolés	166
175	Action sur un point de plusieurs points isolés	166
176	Théorème de Gauss	168
177	Attraction d'une masse continue sur un point extérieur	169
178	Etude du potentiel à l'infini	170
179	Attraction d'une couche sphérique homogène sur un point extérieur	171

Nos		Pages
180	Potentiel et attraction d'un volume continu sur un point intérieur – Formule de Poisson	174
181	Les relations $X = \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots$ subsistent à l'intérieur du volume attirant	178
182	Dérivées secondes du potentiel	180
183	Equation de Poisson	181
184	Théorème de Gauss	182
185	Masses attirantes illimitées – Action d'une barre homogène	184

Lithomount
Pamphlet
Binder
Gaylord Bros.
Makers
Syracuse, N. Y.
PAT. JAN 21, 1908

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
3 0112 068231106